

Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Vrijdag 10 januari 2025, 9:00-12:00

-
- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer. Voorzie alle vellen van een nummer samen met het totaal aantal vellen.
 - Geef niet alleen de eindantwoorden, maar leg ook elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook niet zomaar formules uit het boek zonder afleiding.
 - Qua (elektronische) hulpmiddelen is alleen een simpele rekenmachine toegestaan.
 - Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven en is verspreid over **twee** pagina's.

Succes!

1.) Beschouw voor $b > 0$ de vergelijking,

$$\dot{x} = (2x + g(t))^b. \quad (1)$$

- (a) Neem $b = 1$ en $g(t) = e^{2t} \cos(t)$. Bepaal de oplossing $x(t)$ van dit inhomogene probleem.
- (b) Neem nu $b > 0$ en $g(t) = 1$. Bepaal de oplossing $x(t)$ van (1) die voldoet aan de beginvoorwaarde $x(\frac{1}{2}) = 0$.
Hint: Bekijk $b = 1$ apart.
- (c) Voor $b > 1$, $g(t) = 1$ hebben we dat $x(t)$ – met $x(\frac{1}{2}) = 0$ – opblaast in eindige tijd. Dat wil zeggen, voor $b > 1$ geldt er dat de oplossing $x(t)$ alleen bestaat voor $t \in (-\infty, T(b))$ waar $T(b) < \infty$.
Bepaal (de maximale waarde van) $T(b)$.
- (d) Is het feit dat $T(b) < \infty$ geldt voor $b > 1$, in strijd met de Unicité- en Existentiestelling?

2.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x - y - 2xy + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - 3y - 2y^2 + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2)$$

Gegeven is dat $(0,0)$ het enige kritieke punt is.

- (a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal vervolgens hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit van $(0,0)$ voor het originele stelsel (2)?
- (b) Schrijf het stelsel in poolcoördinaten r en θ .
- (c) Bewijs dat er minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing bestaat. Geef, ter illustratie, ook een schets van het bijbehorende faseportret in het (x, y) -vlak.

Vervolg op volgende pagina!

3.) Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 19x = f(t), \quad (3)$$

waarin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

- (a) Beschouw eerst het homogene probleem ($f(t) \equiv 0$). Vind de algemene oplossing $x_{\text{hom}}(t) = x_{\text{hom}}(t; A, B)$ van (1), met $A, B \in \mathbb{R}$ vrij te kiezen parameters.
- (b) Beschouw nu het inhomogene probleem. Bepaal ook hiervan de algemene oplossing $x_{\text{inh}}(t) = x_{\text{inh}}(t; \tilde{A}, \tilde{B})$, waarbij nu $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$ de vrije parameters zijn.
Hint. Gebruik de variatie van constante methode.
- (c) Beschouw wederom het inhomogene probleem. Neem aan dat er een $\alpha > 0$ en $C > 0$ zijn zodanig dat $f(t)$ voldoet aan

$$|f(t)| < Ce^{-\alpha t} \quad \text{voor } t > 0.$$

Laat zien dat het inhomogene probleem (3) een unieke oplossing $x_{\text{inh}}^*(t)$ heeft waarvoor geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{inh}}^*(t) = 0$.

Als onderdeel (b) niet gelukt is gebruik dan

$$\begin{aligned} x_{\text{inh}}(t; \tilde{A}, \tilde{B}) &= \left[\left(\tilde{A} + \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^t e^{-2s} \sin(\sqrt{5}s) f(s) ds \right) \cos(\sqrt{5}t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{B} + \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^t e^{-2s} \cos(\sqrt{5}s) f(s) ds \right) \sin(\sqrt{5}t) \right] e^{2t} \end{aligned}$$

4.) Bekijk het prooi-roofdier model

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1-x) - yx, \\ \dot{y} &= y(dx-1), \end{cases} \quad (4)$$

met $0 < d < 1$ en $x \geq 0, y \geq 0$.

Definieer $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))^T$ als de oplossing van het stelsel met beginvoorwaarde $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}_+^2$. Oftewel, er geldt $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0)))^T = (x_0, y_0)^T$.

- (a) Bepaal alle vaste/equilibrium punten. Geef het gelineariseerde stelsel rond elk vast punt en bepaal de stabiliteit van dat vaste punt voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit van de vaste punten voor het gehele stelsel (4)?
- (b) Geef voor alle vaste punten een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt, gebruik makende van de bijbehorende eigenvectoren. Vermeld hierbij het karakter (zadel, centrum, focus of knoop).
Opmerking. De eigenvectoren bij een centrum of focus hoeft je niet te bepalen.
- (c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y) -vlak, $x \geq 0, y \geq 0$, en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x, y) -vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nullclines.
- (d) Bepaal voor al deze oplossingen $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$. Geef ook een bewijs hiervoor.

Einde!