

Hertentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Dinsdag 25 maart 2025, 9:00-12:00

-
- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer. Voorzie alle vellen van een nummer samen met het totaal aantal vellen.
 - Geef niet alleen de eindantwoorden, maar leg ook elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook niet zomaar formules uit het boek zonder afleiding.
 - Qua (elektronische) hulpmiddelen is alleen een simpele rekenmachine toegestaan.
 - Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven en is verspreid over **twee** pagina's.
-

Succes!

- 1.) Beschouw voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de tweede orde vergelijking,

$$(t^2 + 1)\ddot{y} - \alpha t \dot{y} + \beta y = 0 \quad (1)$$

- (a) Neem $\alpha = \beta = 2$. Bepaal door middel van reeksontwikkelingen rond $t_0 = 0$ van de vorm $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ de twee onafhankelijke oplossingen $y_1(t; (2, 2))$ en $y_2(t; (2, 2))$ van vergelijking (1) waarvoor geldt dat $y_1(0; (2, 2)) = 1$, $\dot{y}_1(0; (2, 2)) = 0$ en $y_2(0; (2, 2)) = 0$, $\dot{y}_2(0; (2, 2)) = 1$.

Merk op dat de algemene oplossing $y(t; (2, 2))$ van (1) een tweedegraads polynoom is.

- (b) Neem $(\alpha, \beta) = (\alpha_3, \beta_3)$ met $\beta_3 = 6$. Laat zien dat voor $\alpha_3 = 4$ geldt dat de algemene oplossing $y(t; (4, 6))$ van (1) een derdegraads polynoom is.
Hint. Ga te werk als in (a).
- (c) Geef voor elke $k \geq 4$ een voorbeeld van een paar (α_k, β_k) waarvoor geldt dat de algemene oplossing $y(t; (\alpha_k, \beta_k))$ van (1) een polynoom van graad k is.

- 2.) Beschouw voor $\mu \geq 0$ het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= (1 + \mu)y + x(4 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= -x + y(4 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (2)$$

Gegeven is dat $(0, 0)$ het enige kritieke punt is.

- (a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal vervolgens hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit van $(0, 0)$ voor het originele stelsel (2)?
- (b) Schrijf het stelsel in poolcoördinaten r en θ .
- (c) Neem $\mu > 0$. Bewijs dat stelsel (2) minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing heeft als μ voldoende *klein* is. Geef, ter illustratie, ook een schets van het bijbehorende faseportret in het (x, y) -vlak.
Opmerking. Een iets meer specifieke maar equivalente formulering luidt: Laat zien dat er een constante $\mu_0 > 0$ bestaat zodanig dat stelsel (2) minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing heeft voor $0 < \mu < \mu_0$.

Vervolg op volgende pagina!

3.) Bekijk de eerste orde inhomogene vergelijking

$$(2 + t^4) \frac{dx}{dt} = -4\beta t^3 x + f(t) \quad (3)$$

met voor $t \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar.

- (a) Bekijk eerst de homogene vergelijking waarvoor $f(t) \equiv 0$ en $\beta > 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_h(t; \beta)$ van (3) en toon aan dat $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t; \beta) = 0$.
- (b) Neem $\beta = 1$ en $f(t) = 2t^3$. Bepaal de algemene oplossing $x_{in}(t; 1)$ van (3) en toon aan dat $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{in}(t; 1) = \frac{1}{2}$.
- (c) Neem $\beta > 0$. Bepaal een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{in}(t; \beta)$ van het algemene inhomogene probleem (3).
- (d) Neem aan dat $\frac{f(t)}{t^3}$ naar een constante waarde L gaat als $t \rightarrow \infty$, ofwel: neem aan dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^3} = L$. Laat voor alle $\beta > 0$ zien dat voor iedere oplossing $x_{in}(t; \beta)$ van (3) geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{in}(t; \beta) = \frac{L}{4\beta}$.
Hint. Volgens de definitie geldt het volgende voor $f(t)$: er is voor iedere $\varepsilon > 0$ een $T > 0$ zodanig dat voor alle $t > T$ geldt dat $(L - \varepsilon)t^3 < f(t) < (L + \varepsilon)t^3$.

4.) Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(y - 2), \\ \dot{y} &= y(x^2 - y - 2). \end{cases} \quad (4)$$

Definieer $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))^T$ als de oplossing van (4) met beginvoorwaarde $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$. Oftewel, er geldt $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0)))^T = (x_0, y_0)^T$.

- (a) Bepaal alle vaste/equilibrium punten. Geef het gelineariseerde stelsel rond elk vast punt. Bepaal dan hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van dat vaste punt voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit van de vaste punten voor origineel stelsel (4)?
- (b) Geef voor alle vaste punten waarvoor geldt $y \leq 0$ een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt, gebruik makende van de bijbehorende eigenvectoren.
- (c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y) -vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x, y) -vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nullclines. Geef ook de vaste punten in de schets.
- (d) Bekijk nu oplossingen met beginvoorwaarden $(x_0, y_0)^T$ waarvoor geldt dat $x_0^2 - 1 < y_0 < 1$. Bewijs dat voor al deze oplossingen er geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))^T = (0, 0)^T$.

Einde!