

HERTENTAMEN TOPOLOGIE
22 JANUARI 2025, 9:00-12:00

Vermeld naam en studentnummer op elk vel. Schrijf duidelijk en motiveer je antwoorden. Succes!

Opgave 1 [9 pt]

We beschouwen op $\mathbb{R}$ de topologie $\mathcal{T}_l$ voortgebracht door de basis

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Vind $\text{int } A$ en $\overline{A}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ voor $A = [-1, 1]$.
- (b) Is $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ samenhangend?
- (c) Zij $\mathcal{T}_{\text{st}}$ de Euclidische topologie op $\mathbb{R}$: zijn $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ homeomorf?
- (d) Is de afbeelding

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$$

gedefinieerd door $f(x) = 0$ voor $x < 0$ en $f(x) = 1$ voor $x \geq 0$ continu?

Opgave 2 [8 pt]

Ga na of de volgende beweringen juist of onjuist zijn. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

- (a) Als X een compacte topologische ruimte is en $A \subseteq X$ een gesloten deelverzameling, dan is A ook compact.
- (b) Zij X een topologische ruimte en $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie open deelverzamelingen van X . Dan is de doorsnede

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

ook open in X .

- (c) Als $f : X \rightarrow Y$ een continue en surjectieve afbeelding is en X is wegsamenhangend, dan is Y ook wegsamenhangend.

Opgave 3 [8 pt]

Zijn de volgende ruimten compact? Bewijs je bewering.

- (a) $S^1 \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ en } y = 0\}$ als deelruimte van $\mathbb{R}^2$ met de Euclidische topologie;
- (b) de verzameling

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

als deelruimte van $\mathbb{R}$ met de Euclidische topologie;

- (c) $\mathbb{Z}$ met de discrete topologie.

Opgave 4 [7 pt]

Zij $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ de drie-dimensionale Euclidische ruimte met de oorsprong verwijderd. Beschouw de volgende equivalentierelatie op X :

$$x \sim x' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \text{ z.d. } x' = \lambda x.$$

Bewijs dat $X/\sim$ homeomorf is met S^2 .

Opgave 5 [8 pt]

Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als er een $x_0 \in X$ bestaat en een homotopie $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tussen de constante afbeelding $X \rightarrow X$ met waarde x_0 en de identiteitsafbeelding $i_X : X \rightarrow X$.

- (a) Laat zien dat $\mathbb{R}^n$ samentrekbaar is.
- (b) Laat zien dat een samentrekbare ruimte wegsamenhangend is.
- (c) Neem aan dat X samentrekbaar is. Zij Y een andere topologische ruimte en $f, g : Y \rightarrow X$ twee continue afbeeldingen: bewijs dat f en g homotoop zijn.

Opgave 6 [5 pt]

Zij $X = S^1 \times D^2$ en zij $A = S^1 \times \partial D^2 = S^1 \times S^1$ de rand van X . Bewijs dat er geen retractie van X op A bestaat.

Normering: het cijfer is gelijk aan $1 + \frac{\text{\#punten}}{5}$.