

Tentamen Algebra 1

dinsdag 10 juni 2025

Je mag het dictaat gebruiken, maar geen andere boeken, aantekeningen of uitwerkingen. Je mag opgaven 2.46 en 2.49 van het dictaat zonder bewijs gebruiken, maar andere opgaven niet. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

Totaal 45 punten. Cijfer = (punten/5) + 1.

1. [9 punten] Laat a, b de volgende elementen van S_7 zijn:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal het teken en de orde van de elementen a en b .
 - (b) Bereken $(ab)^{2025}$.
 - (c) Wat is de maximale orde van een element in S_7 ?
2. [9 punten] Een *junitaart* is een ronde taart voorzien van een kaarsje in het midden en zes kaarsjes aan de rand, op gelijke afstanden geplaatst in een regelmatige zeshoek. Hoeveel verschillende taarten kan men maken als er kaarsjes beschikbaar zijn in 10 verschillende kleuren?
3. [9 punten] Laat A en B eindige groepen zijn, en $\text{Hom}(A, B)$ de verzameling van groepshomomorfismen $A \rightarrow B$.
- (a) Bewijs: als A cyclisch is, dan geldt $\#\text{Hom}(A, B) \leq \#B$.
 - (b) Geldt algemeen $\#\text{Hom}(A, B) \leq \#B$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
 - (c) Bepaal de orde van $\text{Hom}(S_5, C_5)$.
4. [9 punten]
- (a) Geef een geheel getal x zodanig dat $4x \equiv 1 \pmod{2025}$.
 - (b) Geef een geheel getal y zodanig dat $y \not\equiv 0 \pmod{2025}$ en $y^3 \equiv 0 \pmod{2025}$.
 - (c) Bestaat een geheel getal z zodanig dat $z \not\equiv 1 \pmod{2025}$ en $z^3 \equiv 1 \pmod{2025}$? Bepaal zo'n getal of bewijs dat het niet bestaat.
5. [9 punten] Geef in de drie gevallen hieronder een voorbeeld (met motivatie) of een bewijs dat zo'n voorbeeld niet bestaat:
- (a) Een groep waarin alle elementen geconjugeerd zijn.
 - (b) Een abelse groep van orde meer dan 1000 waarin elk element geconjugeerd is met zijn inverse.
 - (c) Een niet-abelse groep waarin elk element geconjugeerd is met zijn inverse.