

Hertentamen Algebra 1

dinsdag 1 juli 2025

Je mag het dictaat gebruiken, maar geen andere boeken, aantekeningen of uitwerkingen. Je mag opgaven 2.46 en 2.49 van het dictaat zonder bewijs gebruiken, maar andere opgaven niet. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

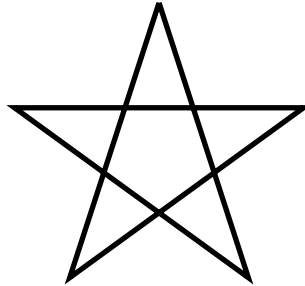
Totaal 45 punten. Cijfer = (punten/5) + 1.

1. [9 punten] Laat a, b de volgende elementen van S_7 zijn:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal het teken en de orde van de elementen a en b .
- (b) Bereken $(ab)^{2025}$.
- (c) Is er een ondergroep $H \subset S_7$ met $a \in H$ zodanig dat a en a^{-1} niet geconjugeerd zijn in H ?

2. [9 punten] Een *pentagram* is een vijfpuntige ster gemaakt uit 5 metalen staafjes van gelijke lengte die de diagonalen vormen van een regelmatige vijfhoek—zie het plaatje hieronder. Hoeveel verschillende pentagrammen kan men maken als de staafjes beschikbaar zijn in 10 verschillende kleuren?



3. [9 punten]

- (a) Zij $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ een homomorfisme van de additieve groep van rationale getallen naar de additieve groep van reële getallen. Bewijs dat er $a \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(x) = ax$ geldt voor alle $x \in \mathbb{Q}$.
- (b) Hoeveel verschillende homomorfismen $S_7 \rightarrow C_7$ bestaan er?
- (c) Hoeveel verschillende homomorfismen $C_7 \rightarrow S_7$ bestaan er?

Op de volgende pagina staan nog twee opgaven

4. [9 punten] Vind voor elk van de volgende vergelijkingen een oplossing $x \in \mathbb{Z}$, of leg uit waarom zo'n oplossing niet bestaat.

(a) $7x \equiv 3 \pmod{2025}$

(b) $100x \equiv 25 \pmod{2025}$

(c) $4^x \equiv 2 \pmod{2025}$

5. [9 punten] Geef in de drie gevallen hieronder een voorbeeld (met motivatie) of een bewijs dat zo'n voorbeeld niet bestaat:

(a) een groep G met $x, y \in G$ van eindige orde waarvoor xy oneindige orde heeft.

(b) een groep G met ondergroepen $H \subset N \subset G$ waarvoor H normaal is in N en N normaal in G , maar H *niet* normaal in G .

(c) een niet-abelse groep G waarvoor alle ondergroepen $H \subset G$ normaal zijn.