

Analyse 2, 2024-2025

Hertentamen

Vrijdag 4 juli, 13:15 – 16:15

- Toegestane bronnen:
 - Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*
 - het toevoegingen-document op Brightspace (toevoegingen_2324.pdf)
 - hoorcollegenotities (beschikbaar via Brightspace)
 - één kantje A4 met handgeschreven aantekeningen
- Dit tentamen heeft drie opgaven. Begin iedere opgave op een nieuwe pagina, met naam en studentnummer
- Motiveer ieder antwoord met een berekening, redenering, en/of verwijzing naar de theorie
- Als je een bepaalde deelopgave niet hebt kunnen maken, ga dan door naar de volgende deelopgave; de meeste deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar te beantwoorden
- Wat mag je niet gebruiken: rekenmachine, digitale bronnen

Opgave 1 [10 punten]

Bekijk de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2 + 2y^3}{1 + x^2}$.

[1 punt] a) Laat zien dat

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x(1 + 3y^2 - 2y^3)}{(1 + x^2)^2}, \frac{6y^2 - 6y}{1 + x^2} \right).$$

[1 punt] b) Laat zien dat f continu differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$.

[1 punt] c) Bepaal het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, -1)$.

Bekijk de niveauverzameling $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$, met $c \in \mathbb{R}$.

[2 punten] d) Neem $c = 0$ en laat zien dat $(1, 1) \in N_0$. Laat vervolgens zien dat N_0 in een omgeving van $(1, 1)$ geschreven kan worden als grafiek over y .

[1 punt] e) Laat zien dat de verzameling van kritieke punten van f wordt gegeven door $Q = \{(0, 0), (0, 1)\}$.

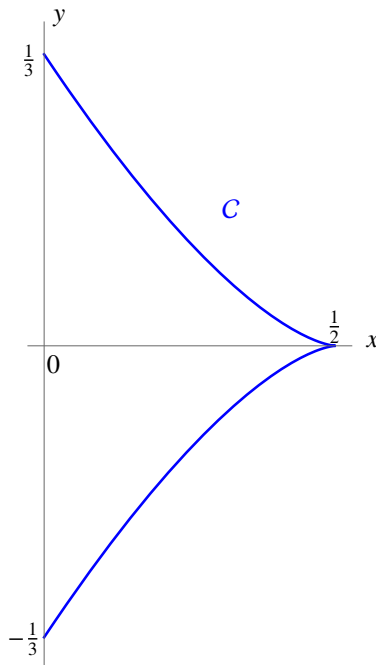
[2 punten] f) Laat zien dat $(0, 1)$ een lokaal minimum is van f ; je mag gebruiken dat alle tweede afgeleiden van f continu zijn in een omgeving van $(0, 1)$. Is $(0, 1)$ een globaal minimum? Licht je antwoord toe.

[2 punten] g) Laat zien dat er *geen* omgeving van het punt $(0, 0)$ bestaat waar N_0 geschreven kan worden als de grafiek van een unieke functie $\psi(y)$.

Hint: Los de vergelijking $f(x, y) = 0$ op voor x . Wat gebeurt er in $(0, 0)$?

Opgave 2 [9 punten]

Zij C de kromme gegeven door de parametrisatie $r(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$, met $-1 \leq t \leq 1$; zie ook figuur 1.



Figuur 1: De kromme C van opgave 2 in blauw.

[1,5 punten] a) Bepaal de richting waarin C wordt doorlopen, en laat zien de lengte van C gelijk is aan $\frac{2}{3}(-1 + 2\sqrt{2})$.

Zij D het gebied dat tussen C en de y -as ligt, waarbij C en het gedeelte van de y -as tussen $y = \frac{1}{3}$ en $y = -\frac{1}{3}$ allebei deel uitmaken van D . De rand van D wordt gegeven door

$$\partial D = C \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ en } -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

[1,5 punten] b) Laat zien dat D een regulier gebied is. Is D gesloten? Motiveer je antwoord.

[2 punten] c) Bereken de oppervlakte van D door de stelling van Green toe te passen met het vectorveld $F(x, y) = (-y, 0)$. Controleer eerst of je voldoet aan de voorwaarden van de stelling van Green.

We bekijken de transformatie $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y) = \Phi(u, v) = \left(\frac{1}{2}v^2, \frac{1}{3}u^3\right)$.

[1,5 punten] d) Laat zien dat Φ een coördinaattransformatie is op het open gebied $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0 \text{ en } v > 0\}$.

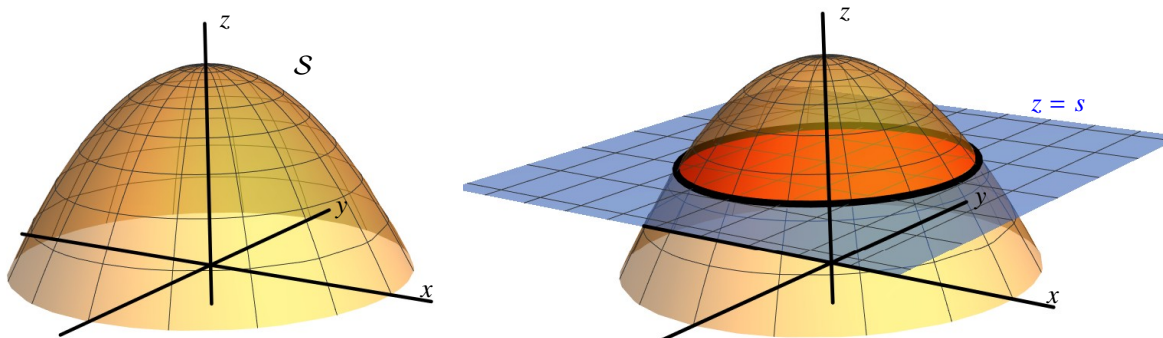
[1,5 punten] e) Bepaal de verzameling E waarvoor geldt dat E door Φ wordt afgebeeld op D , oftewel het origineel van D onder de afbeelding Φ . Maak een schets van E in het (u, v) -vlak.

[1 punt] f) Bereken nogmaals het oppervlak van D , maar nu met behulp van Φ .

Als je het antwoord op vraag e) niet hebt gevonden, gebruik dan $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq 1 - |u|, -1 \leq u \leq 1\}$.

Opgave 3 [9 punten]

We bekijken de functie $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - x^2$. Zij $S \subset \mathbb{R}^3$ het oppervlak dat je krijgt als je de grafiek van g om de z -as wentelt; zie figuur 2.



Figuur 2: Links: het oppervlak S . Rechts: S doorsneden met een vlak $z = s$.

- [1 punt] a) Als we S doorsnijden met het vlak $z = s$, voor een zekere vaste waarde $s \in (0, 1)$, dan krijgen we een cirkel; zie ook figuur 2. Geef een parametrisatie van deze cirkel, en gebruik dit resultaat om te laten zien dat het oppervlak S geparametriseerd kan worden met

$$\sigma(s, t) = (\sqrt{1-s} \cos(t), \sqrt{1-s} \sin(t), s), \quad 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- [1,5 punten] b) Laat zien dat de totaaloppervlakte van S gelijk is aan $\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{6}\pi$.

We bekijken nu de transformatie $\Omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) \mapsto (x, y, z) = \Omega(u, v, w)$, met

$$\Omega(u, v, w) = (u \cos(v), u \sin(v), w). \quad (1)$$

Zij V het volume dat wordt ingesloten door S en door het (x, y) -vlak.

- [2 punten] c) Bereken met behulp van Ω het volume van V .
Hint: Bepaal de verzameling U die door Ω wordt afgebeeld op V .
- [2 punten] d) Gebruik de stelling van Gauss, toegepast op het vectorveld $F(x, y, z) = (x, y, z)$, om het volume van V te berekenen.

Zij $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ de kromme die gegeven wordt door de parametrisatie $k(t) = \sigma(t, t)$, met $0 \leq t \leq 1$. Bekijk het vectorveld

$$G(x, y, z) = (\cos(x) - z^2 \sin(x), e^z \sin(y), 2z \cos(x) - e^z \cos(y)).$$

- [2,5 punten] e) Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathcal{K}} \langle G, dr \rangle$.
Hint: Onderzoek of G een potentiaalfunctie heeft.