

Tentamen Inleiding Maattheorie, 18 juni 2025

- Zet op ieder blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer.
- Het is niet toegestaan om tijdens het tentamen documenten of apparaten te gebruiken.
- Bewijs al je beweringen en als je stellingen gebruikt in je antwoorden, laat dan duidelijk zien dat aan alle voorwaarden van de stelling is voldaan.
- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.

Opgave 1

Laat X een verzameling zijn en $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Bewijs dat voor iedere $Y \subseteq X$ geldt dat

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap Y = \sigma(\mathcal{A} \cap Y).$$

(Voor een collectie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ schrijven we $\mathcal{C} \cap Y = \{C \cap Y : C \in \mathcal{C}\}$.)

Opgave 2

Een *atoom* van een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ is een verzameling $A \in \mathcal{A}$ met de volgende eigenschap: voor iedere $B \in \mathcal{A}$ met $B \subseteq A$ geldt dat $B = \emptyset$ of $B = A$.

- Geef een voorbeeld van een meetbare ruimte met een niet-leeg atoom.
- Laat $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de Borel σ -algebra op $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs dat als A een niet-leeg atoom is van $(X, \mathcal{A})$ en als $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ een $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meetbare functie is, dat f dan constant is op A .

Opgave 3

Laat τ de telmaat zijn op $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$. Bewijs dat voor alle $f \in \mathcal{L}^1(\tau)$ geldt dat

$$\int_{\mathbb{Q}} f(2n+1) d\tau(n) = \int_{\mathbb{Q}} f(n) d\tau(n).$$

Opgave 4

Bereken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\cos(x^5)}{1+nx^2} dx.$$

Opgave 5

Schrijf $\mathbb{Q} = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en laat $\mathcal{B}([0, 1]^2)$ de Borel σ -algebra zijn op $[0, 1]^2$. Definieer voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $E_n = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : xy = q_n\}$.

- Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $E_n \in \mathcal{B}([0, 1]^2)$.

Laat $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de functie zijn gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de Borel σ -algebra op $\mathbb{R}$ zijn.

- Bewijs dat f een $\mathcal{B}([0, 1]^2)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meetbare functie is.
- Laat λ^2 de Lebesguemaat zijn op de meetbare ruimte $([0, 1]^2, \mathcal{B}([0, 1]^2))$. Bewijs dat $\int_{[0, 1]^2} f d\lambda^2 = 0$.

Veel succes!