

## Hertentamen Algebra 3, 7 juli 2025

Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je er aan komt. Laat ook je berekeningen zien.

Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Dit is een open-boek tentamen. Je mag het dictaat gebruiken, en ook een A4-tje aan eigen aantekeningen. Je mag geen elektronische hulpmiddelen gebruiken, ook geen rekenmachines en telefoons.

Zolang je ernaar verwijst mag je in je tentamen gebruik maken van resultaten en opgaven uit het dictaat tenzij je expliciet naar het bewijs daarvan gevraagd wordt, of er expliciet gezegd wordt dat je een opgave niet mag gebruiken.

Je mag gebruiken dat er geldt  $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ .

*Opgave 1.* Bepaal de Galoisgroep van het polynoom  $f = X^4 - 2025$  over de volgende lichamen.

- (a)  $\mathbb{R}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_7$ ;
- (c)  $\mathbb{F}_{13}$ ;
- (d)  $\mathbb{Q}$ .

*Opgave 2.* Zij  $\beta = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$  en  $\zeta = \zeta_8 = e^{2\pi i/8} \in \mathbb{C}$ . Definieer  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$  en  $L = K(\beta) = \mathbb{Q}(\zeta, \beta)$ .

- (a) Geef een polynoom  $f \in \mathbb{Q}[X]$  waarvoor  $L$  een ontbindingslichaam is.
- (b) Laat zien dat er geldt  $[L : K] = 2$ .
- (c) Laat zien dat  $L/\mathbb{Q}$  een Galois uitbreiding is.
- (d) Geef een automorfisme  $\sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  van orde 4 door de beelden van  $\zeta$  en  $\beta$  te geven. (Vergeet niet te laten zien dat de orde 4 is.)
- (e) Geef een automorfisme  $\tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  van orde 2 dat niet gelijk is aan  $\sigma^2$ , ook door de beelden van  $\zeta$  en  $\beta$  te geven. (En vergeet niet te laten zien dat  $\tau$  aan de eisen voldoet.)
- (f) Met welke van de volgende groepen is  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  isomorf?

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ D_4 & D_8 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ A_4 & S_4 & (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \end{array}$$

- (g) Hoeveel deellichamen van  $L$  van graad 4 zijn er?
- (h) Geef een element  $\alpha \in L$  van graad 4 over  $\mathbb{Q}$ , waarvoor  $\mathbb{Q}(\alpha)$  niet gelijk is aan  $K$  of  $\mathbb{Q}(\beta)$ .

*Opgave 3.* Zij  $\Phi_{12} \in \mathbb{Z}[X]$  het 12-de cyclotomische polynoom.

- (a) Laat zien dat de graad van  $f$  gelijk is aan 4.
- (b) Laat zien dat er geen priemgetal  $p > 3$  is waarvoor  $\Phi_{12}$  als polynoom in  $\mathbb{F}_p[X]$  irreducibel is.
- (c) Geef een priem  $p$  waarvoor  $\Phi_{12}$  als polynoom in  $\mathbb{F}_p[X]$  het product is van 2 irreducibele factoren.
- (d) Geef een priem  $p$  waarvoor  $\Phi_{12}$  als polynoom in  $\mathbb{F}_p[X]$  het product is van 4 irreducibele factoren.

*Opgave 4.* Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

- (a) Als  $L/K$  een lichaamsuitbreiding is, en  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  hebben allemaal graad 3 over  $K$ , dan is de graad  $[K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : K]$  een macht van 3.
- (b) Als  $L/\mathbb{Q}$  een Galoisuitbreiding is met Galoisgroep  $S_4$ , en  $\alpha \in L$  is een element van graad 3 over  $\mathbb{Q}$  (dat wil zeggen,  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ ), dan is elk element van  $L$  construeerbaar (met passer en lineaal) uit  $\{0, 1, \alpha\}$ .
- (c) Zij  $f \in \mathbb{Z}[X]$  een polynoom, en  $a \in \mathbb{C}$  een nulpunt van  $f$ ; als  $K$  een normale afsluiting is van  $\mathbb{Q}(a)$ , dan is  $K$  een ontbindingslichaam van  $f$ .