Herkansing Algebra 3, 7 juli 2014, 10:00–13:00

Bas Edixhoven

Je mag bij dit tentamen geen elektronische hulpmiddelen gebruiken. Wel toegestaan zijn boeken, syllabi en aantekeningen. Een indicatie van de normering staat onderaan op de achterkant. Er zijn 4 opgaven. Het tentamen wordt nagekeken op 10 of 11 juli. Succes!

Opgave 1. Laat $f = X^3 - 14$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Bepaal de verzameling N van nulpunten van f in $\mathbb{C}$.

(b) Bepaal het ontbindingslichaam $\Omega_{\mathbb{Q}}^f \subset \mathbb{C}$, en geef een basis van $\Omega_{\mathbb{Q}}^f$ over $\mathbb{Q}$.

(c) Bepaal $\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathbb{Q}}^f/\mathbb{Q})$, en geef de bijbehorende permutaties van N.

(d) Geef een primitief element β van $\Omega_{\mathbb{Q}}^f$ over $\mathbb{Q}$.

(e) Geef het minimumpolynoom $f_{\mathbb{Q}(\zeta)}^{\beta}$, waar $\zeta = e^{2\pi i/3}$.

Opgave 2. Laat p een priemgetal zijn, en $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{p^{10}}$.

(a) Hoeveel deellichamen heeft $\mathbb{F}$? Geef voor elk deellichaam K het aantal α in K met $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$.

(b) Bepaal het aantal irreducibele polynomen van graad 10 in $\mathbb{F}_p[X]$.

(c) Neem aan dat $p \neq 11$. Laat zien dat $\#\mathbb{F}^*$ deelbaar is door 11.

(d) Neem aan dat $p \equiv 2$ modulo 11. Laat zien dat $\mathbb{F}$ een ontbindingslichaam is van Φ_{11} over $\mathbb{F}_p$.

(e) Neem aan dat $p \equiv 4$ modulo 11. In hoeveel irreducibele factoren ontbindt Φ_{11} in $\mathbb{F}_p[X]$? (Hint: gebruik het Frobenius-automorfisme.)

Opgave 3.

(a) Laat $n \geq 1$ geheel, $a \neq 0$ in $\mathbb{Q}$, en $f = X^n - a$ in $\mathbb{Q}[X]$. Is $\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathbb{Q}}^f/\mathbb{Q})$ oplosbaar?

(b) Geef een voorbeeld van een $f \in \mathbb{Q}[X]$ met $\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathbb{Q}}^f/\mathbb{Q})$ oplosbaar maar niet commutatief.

(c) Laat zien dat er een f in $\mathbb{Q}[X]$ bestaat met $\#\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathbb{Q}}^f/\mathbb{Q}) = 3$. (Hint: bekijk $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ voor een geschikte n, en doe dan *nog* wat.)

Opgave 4.

(a) Laat $\alpha = \sqrt[4]{2}\, e^{2\pi i/16}$ in $\mathbb{C}$. Laat zien dat $\alpha^2 = 1 + i$, en bepaal $f_{\mathbb{Q}}^{\alpha}$.

(b) Laat zien dat $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ en geef een basis van $\mathbb{Q}(\alpha)$ over $\mathbb{Q}(i)$.

(c) Laat $\beta = \sqrt[4]{2}\, e^{-2\pi i/16}$ in $\mathbb{C}$. Laat zien dat $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. Hint: gebruik (b).

(d) Laat $f = f_{\mathbb{Q}}^{\alpha}$. Bepaal $[\Omega_{\mathbb{Q}}^{f} : \mathbb{Q}]$ en $\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathbb{Q}}^{f}/\mathbb{Q})$.

Normering (indicatief): 100 = 10 (gratis) + 25 (5x5) + 20 (5x4) + 21 (3x7) + 24 (4x6)