

Tentamen Algebra 3
13 juni 2016, 14:00–17:00, zaal 312 Snellius

Dit is een open-boek-tentamen: alle dictaten, aantekeningen en boeken mogen geraadpleegd worden. Er mag geen gebruik worden gemaakt van elektronische hulpmiddelen.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Laat $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ waarbij α een nulpunt is van het polynoom $f = X^3 + 7X + 2$.

- (a) Laat zien dat $[K : \mathbf{Q}] = 3$.
- (b) Bereken de norm $\mathbf{N}_{K/\mathbf{Q}}(\alpha^2 + \alpha)$.
- (c) Laat zien dat f precies één nulpunt heeft in \mathbf{R} .
- (d) Laat zien dat K geen Galoisuitbreiding is van \mathbf{Q} .

Opgave 2. Laat $K = \mathbf{Q}(\sqrt[6]{-3})$. Laat zien dat K graad 6 heeft over \mathbf{Q} en dat K een Galoisuitbreiding is van \mathbf{Q} . Wat is de Galoisgroep?

Opgave 3. Laat p een oneven priemgetal zijn, en beschouw het polynoom $f = X^p + X \in \mathbf{F}_p[X]$. Laat S de verzameling nulpunten van f in de algebraïsche afsluiting $\overline{\mathbf{F}}_p$ van \mathbf{F}_p zijn.

- (a) Laat zien dat $\#S = p$
- (b) Bepaal $S \cap \mathbf{F}_p$.
- (c) De groep voortgebracht door het Frobeniusautomorfisme van $\overline{\mathbf{F}}_p$ werkt op S . Wat zijn de baanlengtes van deze werking?
- (d) Wat is de graad van het ontbindingslichaam van f over \mathbf{F}_p ?

Opgave 4. Laat $z \in \mathbf{C}$ met $z^{13} = 1$ en $z \neq 1$.

- (a) Is z construeerbaar met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$?
- (b) Is $z + z^3 + z^9$ construeerbaar met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$?

— SUCCES!! —