

**Tentamen Algebra 3**  
**13 juni 2016, 14:00–17:00, zaal 312 Snellius**

Dit is een open-boek-tentamen: alle dictaten, aantekeningen en boeken mogen geraadpleegd worden. Er mag geen gebruik worden gemaakt van elektronische hulpmiddelen.

**Motiveer** al je antwoorden!

**Opgave 1.** Laat  $K = \mathbf{Q}(\alpha)$  waarbij  $\alpha$  een nulpunt is van het polynoom  $f = X^3 + 7X + 2$ .

- (a) Laat zien dat  $[K : \mathbf{Q}] = 3$ .
- (b) Bereken de norm  $\mathbf{N}_{K/\mathbf{Q}}(\alpha^2 + \alpha)$ .
- (c) Laat zien dat  $f$  precies één nulpunt heeft in  $\mathbf{R}$ .
- (d) Laat zien dat  $K$  geen Galoisuitbreiding is van  $\mathbf{Q}$ .

**Opgave 2.** Laat  $K = \mathbf{Q}(\sqrt[6]{-3})$ . Laat zien dat  $K$  graad 6 heeft over  $\mathbf{Q}$  en dat  $K$  een Galoisuitbreiding is van  $\mathbf{Q}$ . Wat is de Galoisgroep?

**Opgave 3.** Laat  $p$  een oneven priemgetal zijn, en beschouw het polynoom  $f = X^p + X \in \mathbf{F}_p[X]$ . Laat  $S$  de verzameling nulpunten van  $f$  in de algebraïsche afsluiting  $\overline{\mathbf{F}}_p$  van  $\mathbf{F}_p$  zijn.

- (a) Laat zien dat  $\#S = p$
- (b) Bepaal  $S \cap \mathbf{F}_p$ .
- (c) De groep voortgebracht door het Frobeniusautomorfisme van  $\overline{\mathbf{F}}_p$  werkt op  $S$ . Wat zijn de baanlengtes van deze werking?
- (d) Wat is de graad van het ontbindingslichaam van  $f$  over  $\mathbf{F}_p$ ?

**Opgave 4.** Laat  $z \in \mathbf{C}^*$  een eenheidswortel van orde 35 zijn. Bewijs dat

$$z + z^{11} + z^{(11^2)}$$

construeerbaar is met passer en liniaal vanuit  $\{0, 1\}$ .

— SUCCES!! —