

Tentamen Analyse 1NA en 1W

Vrijdag 9 januari 2015, 14:00-17:00 uur

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer.
 - Er zijn **vijf** opgaven. **VERGEET DE ACHTERKANT NIET!**
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.
-

1.)

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)e^x & \text{voor } x \leq -1; \\ \frac{1}{x+1} & \text{voor } -1 < x < 0; \\ \frac{3xe^x + 3}{e^x + 2} & \text{voor } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Is f continu in 0? Beargumenteer uw antwoord.
 - (b) Is f differentieerbaar in 0? Beargumenteer uw antwoord.
 - (c) Bepaal de afgeleide van f buiten de punten -1 en 0.
 - (d) Laat zien dat de afgeleide van f geen nulpunt op het open interval $(0, \infty)$ heeft.
 - (e) Bepaal alle asymptoten (horizontaal, verticaal, schuin) van f .
 - (f) Bepaal alle extrema van f . Geef niet alleen plaats en grootte, maar vermeld ook of het om een maximum of een minimum gaat en stel, zonder een rekenmachine te gebruiken, vast of het betreffende extremum lokaal of globaal (absoluut) is.
- 2.) Beargumenteer of de volgende reeksen absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen gebruikt worden.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^n \sin(e^{-n}),$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \ln n}{3^n + 1},$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right).$$

3.) Bepaal de verzameling van alle x waarvoor de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n + 1} (x - 1)^n$$

convergeert.

4.) (a) Bekijk de functie

$$f(x) = \ln(1 - x^2) + \cos x.$$

Bepaal het Taylorpolynoom $P_7(x)$ van orde 7 van f rond het punt $a = 0$.

(b) Laat met behulp van een eerste orde Taylorbenadering van $f(x)$ rond het punt $a = 0$ en de daarvoor geldende restterm (ook wel foutterm) zien dat

$$1 - \frac{49}{18}x^2 \leq f(x) \leq 1$$

voor alle x in het gesloten interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5.) Bereken de volgende bepaalde dan wel onbepaalde integralen:

(a)

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1 + x^2} dx,$$

(b)

$$\int \frac{8x^2 - x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} dx,$$

(c)

$$\int x \arcsin(x^2).$$

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	25	18	12	20	25	100
	(3+5+4+2+5+6)	(5+6+7)	(12)	(10+10)	(7+10+8)	