Tentamen Analyse 1W

Vrijdag 6 januari 2017, 14:00–17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zes** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

---

1 De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + 2, & x \leq 0, \\ 2\sqrt{x+1}, & 0 < x \leq 1, \\ 2\sqrt{2} + 1 - x, & 1 < x \leq 2, \\ \dfrac{x^2 - \frac{7}{2}x + 4}{3x - 6}, & x > 2. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f continu is in 1.

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0.

(c) Is f continu in 0? Beargumenteer!

(d) Bepaal de afgeleide f' van f op $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

(e) Ga na of f asymptoten (verticaal, horizontaal of scheef) heeft en bepaal de vergelijkingen van de eventuele asymptoten.

(f) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen locaal zijn.

2 Bekijk de functie $g \colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) = \cos(x^2 + x), \quad x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

(a) Toon aan dat g strict dalend is.

(b) Bepaal het bereik B van g. Geef een volledig bewijs!

(c) Beredeneer dat $g \colon [0, \frac{1}{2}] \to B$ inverteerbaar is en geef een functievoorschrift voor de inverse g^{-1}.

(d) Ga na dat $g(\frac{1}{10}) = \cos(\frac{11}{100})$ en bepaal de afgeleide van g^{-1} in het punt $\cos(\frac{11}{100})$.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergeren, voorwaardelijk convergeren of divergeren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n^2+n)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}n}2^n}{(2n)!}$.

4 Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int\frac{e^x\ln(e^x+1)}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int\frac{4x^2+6x+4}{(x^2+2x+3)(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

5 Bepaal het vijfdegraads Taylorpolynoom rond $a=0$ van de functie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x)=x\arctan(x)-\sin(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

6 Gebruik het eerstegraads Taylorpolynoom van $x\mapsto\tan(e^x)$ rond $a=\ln(\frac{\pi}{4})$, in combinatie met de foutterm, om te laten zien dat voor iedere $x\in[-1,\ln(\frac{\pi}{4})]$ geldt dat

$$\tfrac{1}{2e}\left(x-\ln(\tfrac{\pi}{4})\right)^2\le\tan\left(e^x\right)-1-\tfrac{\pi}{2}\left(x-\ln(\tfrac{\pi}{4})\right)\le\left(\tfrac{\pi^2}{8}+\tfrac{\pi}{4}\right)\left(x-\ln(\tfrac{\pi}{4})\right)^2.$$

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	25 (2+3+2+4+5+9)	10 (2+3+3+2)	25 (8+7+10)	25 (7+8+10)	5 (5)	10 (10)	100