Tentamen Analyse 1W

Maandag 30 januari 2017, 14:00–17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zeven** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

---

1 De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 3 - (x^2 - x + 1)e^{x-1}, & x \leq 1, \\ -\frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{5}{6}x + \frac{4}{3}, & 1 < x < 2, \\ \sqrt{x^2 + x + 3}, & x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f continu is in 1.

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in 2.

(c) Is f continu in 2? Beargumenteer!

(d) Bepaal de afgeleide f' van f op $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(e) Ga na of f asymptoten (verticaal, horizontaal of scheef) heeft en bepaal de vergelijkingen van de eventuele asymptoten.

(f) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen locaal zijn.

2 De kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door de vergelijking

$$y^2 + \sin(xy^2) + 4x^2 - 2\pi x = 2.$$

Gegeven is hier dat voldoende dicht bij het punt $(\frac{1}{2}\pi, \sqrt{2})$ de kromme K de grafiek is van een differentieerbare functie h, die gedefinieerd is op een open interval dat $\frac{1}{2}\pi$ bevat.

Bereken een vergelijking voor de raaklijn aan de kromme K in het punt $(\frac{1}{2}\pi, \sqrt{2})$.

3 Bepaal het vijfdegraads Taylorpolynoom rond $a = 0$ van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \arctan(2x) - \cos(x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergeren, voorwaardelijk convergeren of divergeren:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right).$$

5 Bepaal de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n+1} x^n$$

convergent is.

6 Bereken de volgende onbepaalde en oneigenlijke integralen:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sin^3 x)\sin^3 x}{\cos^3(\sin^3 x)\tan x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x^2+3x}{(x+1)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

7 (a) Toon met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening aan dat voor iedere $b > 0$ de functie gegeven door

$$x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

tweemaal differentieerbaar is op $(0, b)$.

(b) Bekijk de functie $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) = \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t, \ \ x > 0.$$

Geef het eerstegraads Taylorpolynoom van g rond $a = 1$.

(c) Toon aan dat voor iedere $x \geq 1$ geldt dat

$$e(x-1) + e(x-1)^2 \leq \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq e(x-1) + xe^{x^2}(x-1)^2.$$

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	7	Totaal
Punten:	26	7	6	13	10	26	12	100
	(2+5+2+4+5+8)	(7)	(6)	(6+7)	(10)	(8+9+9)	(3+4+5)	