Tentamen Besliskunde 2
12 januari 2014, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. De opgaven tellen alle even zwaar mee.
N.B. Schrijf s.v.p. boven je tentamen of je het vak voor 6 of 10 EC wilt doen!

Deel 1: Theorie

Opgave 1: **Stelling van Nash**
Bewijs de volgende uitspraak: *Ieder bi-matrix spel heeft minstens één evenwichtspaar.*
Je mag hierbij Brouwer's vaste-puntstelling gebruiken.

Opgave 2
Beschouw een continue Markov keten $\{X(t),\ t \geq 0\}$ met waarden in de eindige toestandsruimte $\boldsymbol{S}$. Noteer $\mathbb{P}\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$ met $p_{ij}(t)$ en de generator matrix met Q. Laat T_i de verblijftijd in toestand i zijn, die exponentieel verdeeld is met parameter ν_i.

Beschouw de discrete Markov keten $\overline{P} = (\overline{p}_{ij})$ met

$$\overline{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\nu_i}{\nu} \cdot p_{ij}, & j \neq i \\ 1 - \frac{\nu_i}{\nu}, & j = i, \end{cases}$$

waarbij $\nu \geq \nu_i$ voor alle i en $p_{ij} = q_{ij}/\nu_i$.

Zij $\{N(t)\}$, $t \geq 0\}$ een Poisson proces met parameter ν en beschouw de continue Markov keten $\{\overline{X}(t)\}$, $t \geq 0\}$ met $\overline{X}(t) = \overline{X}_{N(t)}$, waarbij $\overline{X}_{N(t)}$ de discrete tijd Markov keten met transities $\overline{p}_{ij}$ is, en waarvoor geldt $\overline{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$.
Toon aan dat $p_{ij}(t) = \overline{p}_{ij}(t)$ voor alle $i, j \in S$ en alle $t \geq 0$.

Opgave 3
Beschouw een discrete Markovketen $\{X_n\}_n$. Laar R een recurrente klasse zijn en i een gegeven toestand. Definieer de absorptiekans in R, bij start in i, als volgt:

$$a_i = \mathsf{P}\{\exists n \geq 1 \,:\, X_n \in R \,|\, X_0 = i\}.$$

Kies $j, l \in R$. Laat f_{il}, f_{ij} de intreekansen in l respectievelijk j zijn bij start in i. D.w.z.

$$f_{il} = \mathsf{P}\{\exists n \geq 1 \,:\, X_n = l \,|\, X_0 = i\}.$$

Toon aan dat $f_{il} = f_{ij} = a_i$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4 Kosten allocatie

Een wetenschapper wordt door drie universiteiten in plaatsen A, B en C uitgenodigd om een lezing te geven. Ze verwacht dat haar reiskosten vergoed worden. Omdat de drie plaatsen relatief dicht bij elkaar liggen, kunnen de reiskosten gereduceerd worden door de drie bezoeken te combineren. De drie uitnodigende universiteiten moeten uitvechten hoe ze het totale voordeel verdelen. Onderstaande tabel geeft de kosten van een enkele reis tussen de plaatsen A, B en C, en de woonplaats H van de uitgenodigde wetenschapper.

	H	A	B	C
H	–	7	8	6
A	7	–	2	4
B	8	2	–	4
C	6	4	4	–

We nemen aan dat de wetenschapper door alle drie universiteiten evenveel gewaardeerd wordt.

a) Modelleer het kostenverdeelprobleem als een spel in coalitievorm met 3 spelers, door de karakteristieke functie te specificeren.

b) Bereken de Shapleywaarde.

c) Bepaal de nucleolus. **Hint:** je mag gebruiken dat de nucleolus maximaal exces -4,5 heeft.

d) Wat kun je concluderen over de kern? Wat zijn de respectievelijke kosten per universiteit bij de verdelingen in b) en c)? Becommentarieer.

Opgave 5

Klanten arriveren bij een bank met één loket volgens een Poisson proces met parameter λ. Een aankomende klant gaat de bank alleen binnen wanneer het loket vrij is. Hij gaat dus onmiddellijk weg wanneer een klant aan het loket geholpen wordt. Neem aan dat de hoeveelheid bediening die een klant vergt, een algemene verdeling heeft met verdelingsfunctie F en verwachting $1/\mu$ (en de bedieningsduren zijn onafhankelijk van elkaar en van het aankomstproces).

a) Wat voor wachtrijmodel is dit? Toon aan dat de stationaire verdeling van het aantal klanten bij het loket dezelfde is als die van het systeem met een exponentiële bedieningsduur met parameter μ.

b) Bereken het verwachte aantal klanten per tijdseenheid dat de bank binnen gaat.

c) Bereken de fractie van het aantal klanten dat geholpen wordt.

Een fractie $p = 0{,}4$ van de klanten neemt geld op, en wel een hoeveelheid die normaal verdeeld is met verwachting 2000 (in euro's) en variantie 100. De rest van de klanten stort geld. De hoeveelheid gestort geld (per klant) heeft een homogene verdeling op het interval $[0, 6000]$ (d.w.z. $\mathsf{P}\{\text{gestort bedrag} \leq x\} = \frac{x}{6000}$, $x \in [0, 6000]$. Veronderstel dat de hoeveelheid opgenomen dan wel gestort geld per klant onafhankelijk is van wat de andere klanten doen. Laat $\lambda = 2$ en $\mu = 1/2$.

d) Laat G_t de totale toename van het kapitaal van de bank zijn tot tijdstip t, ten gevolge van geldstortingen en -opnames van klanten. Bereken $\lim_{t\to\infty} G_t/t$, dit is de gemiddelde snelheid waarmee het bankkapitaal per tijdseenheid toeneemt.

Opgave 6

Spelers A en B spelen het volgende spel. Gegeven is een rij van n munten met respectievelijke waarden $v_1, \ldots, v_n$:

munt	1	2			i		j			$n-1$	n
waarde	v_1	v_2	$\cdots$	$\cdots$	v_i	$\cdots$	v_j	$\cdots$	$\cdots$	v_{n-1}	v_n

Het aantal munten n is even. De speler die aan zet is, heeft de keuze om of de meest linkse of de meest rechtse munt te pakken. De spelers mogen om beurten een munt pakken. Als alle munten zijn gepakt, krijgt de speler de waarde van de door hem gekozen munten uitgekeerd.

De vraag is: **welke strategie maximaliseert de winst die speler A *zeker* kan behalen?**

Dit kunnen we oplossen met behulp van dynamisch programmeren, door recursieve formules op te stellen voor de maximaal zekere winst $V(i,j)$ van het spel met start-muntenrij $i, \ldots, j$ ($j \geq i$), in termen van de maximaal zekere winst van spellen die starten met subrijen van de muntenrij $i, \ldots, j$.

Zo geldt dat $V(i,i) = v_i$. Immers, alleen de munt i is nog beschikbaar. Voorts geldt dat $V(i, i+1) = \max\{v_i, v_{i+1}\}$. De muntenrij is $i, i+1$. Stel speler A is aan zet. Hij heeft de keuze om munt i of munt $i+1$ te pakken. Hij kiest natuurlijk degene met de hoogste waarde.

a) Gegeven het spel met start-rij $i, \ldots, j$, $j \geq i+2$. Stel dat speler A aan zet is en dat hij munt i kiest. Geef een formule voor de winst die speler A in dit geval zeker kan halen.

b) Stel een formule voor $V(i,j)$ op in termen van $V(i, j-2)$, $V(i+1, j-1)$ en $V(i+2, j)$.

c) Laat de volgende muntenrij gegeven zijn:

munt	1	2	3	4	5	6
waarde	1	4	8	7	6	0

Bereken de maximaal zekere winst van speler A als hij mag beginnen. A hoeft steeds maar uit een rij te kiezen met een even aantal munten. Bereken de achtereenvolgende optimale muntenkeuzes. Welke munt pakt hij als eerste?