Tentamen Besliskunde A
9 maart 2015, 10.00-13.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je deel 2 maken. De opgaven tellen alle even zwaar mee.
N.B. Schrijf s.v.p. boven je tentamen of je het vak voor 6 of 10 EC wilt doen!

Deel 1: Theorie

Opgave 1 Beschouw een twee-persoonsnulsomspel met $n \times m$-uitbetalingsmatrix A. Het element a_{kl} heet een zadelpunt als $a_{kl} = \max_i a_{il} = \min_j a_{kj}$, d.w.z. het is het grootste uit zijn kolom en het kleinste uit zijn rij.

Stel dat a_{kl} een zadelpunt is. Bewijs de volgende twee uitspraken.

a) k en l zijn optimale strategieën voor speler 1 respectievelijk speler 2.

b) $\bar{v}(A) := \min_j \max_i a_{ij} = a_{kl} = \max_i \min_j a_{ij} =: \underline{v}(A)$.

Opgave 2
Zij $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ een rij onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen. Schrijf $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ voor de cumulatieve sommen. Definieer het vernieuwingsproces $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ door

$$N(t) = \sup\{n \mid S_n \leq t\}.$$

Toon aan dat $m(t) = \mathsf{E}N(t) < \infty$ voor $t \geq 0$.

Opgave 3

Gegeven is een gesloten netwerk met K wachtrijen waarin N klanten aanwezig zijn. Elke wachtrij heeft één bediende. De bedieningsduur in wachtrij i is exponenteel verdeeld met parameter μ_i, de bedieningsduur is FIFO en een klant die klaar is met bediening gaat met kans p_{ij} naar wachtrij j, $i, j = 1, \ldots, K$. Er zijn geen beperkingen op de capaciteit van de verschillende wachtrijen. We nemen aan dat de kansen p_{ij}, $i, j = 1, \ldots, K$, de overgangskansen van een irreducibele Markovketen zijn met toestnandsruimte $\{1, \ldots, K\}$.

Het volgende recursieve algoritme berekent het gemiddeld aantal klanten en de gemiddelde verblijftijd in elke wachtrij.

Mean-value algoritme

1. a. Bepaal de stationaire kansen $\pi_i,\ 1 \leq i \leq K$ van de Markov keten P door het stelsel

$$\begin{aligned} \pi_i &= \sum_j \pi_j p_{ji} \\ \sum_i \pi_i &= 1. \end{aligned}$$

   op te lossen.

   b. Laat $n = 1$.

   c. $W_1(i) = \frac{1}{\mu_i}$ voor $i = 1, 2, \ldots, K$.

2. $\alpha_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)};\ \lambda_n(i) = \alpha_n \cdot \pi_i,\ 1 \leq i \leq K;\ L_n(i) = \lambda_n(i) W_n(i),\ 1 \leq i \leq K.$

   Als $n = N$: stop;

   Anders: ga naar stap 3.

3. a. $n := n + 1;\ W_n(i) = \frac{L_{n-1}(i)+1}{\mu_i},\ 1 \leq i \leq K.$

   b. Ga naar stap 2.

Toon de correctheid van het algoritme aan.

Deel 2: Opgaven

We beschouwen een productielijn van flesjes bier bij Heineken. De flesjes ondergaan achtereenvolgens de volgende drie bewerkingen: I de flesjes worden gevuld en van dop voorzien, II gevulde flesjes worden gestickerd, III de flesjes worden in kratten gepakt. In elk fase is er een positeive kans op breuk. Een flesje breekt met kans 0,1 tijdens fase I, met kans 0,16 in fase II en met kans 0,2 in fase III.

Na fases I en II worden niet-gebroken flesjes geïnspecteerd: de kans dat een niet-gebroken flesje na fase I opnieuw door het proces moet, is 0,1, en derhalve 0,9 dat het flesje door mag naar fase II. Na fase II is de kans voor een niet-gebroken flesje eveneens $0,1$ dat het stickeren fout is gegaan en opnieuw moet worden gedaan.

Er zijn teven kostens verbonden aan het uitvoeren van de verschillende fasen. Fase I kost 2 (eenheid), fase II ook 2, en fase III kost 1. Elk gebroken flesje kost 5.

a) De achtereenvolgende fasen waarin een flesje zich bevindt, vormen een Markovketen. Bepaal de klassen van deze Markovketen en of zij transiënt, positief recurrent of nul recurrent zijn. Bereken de stationaire matrix P^*.

b) Bereken de verwachte kosten per flesje.

c) Bereken de verwachte kosten per gebroken flesje.

d) Heineken denkt erover de breukgevoeligheid te verbeteren, door machines aan te schaffen die de breukkans halveren (de overgangskansen voor een niet-gebroken flesje blijven natuurlijk dezelfde!). Dit vereist een investering van 10^6. Hoeveel flesjes moet Heineken *in verwachting produceren (sic!)* om de kosten van deze investering terug te hebben verdiend?

Opgave 5

Een bedrijf heeft drie machines en twee monteurs. Iedere machine functioneert gedurende een exponentieel verdeelde tijdsduur met parameter 4 en de reparatietijd van iedere monteur is exponentieel verdeeld met parameter 5.

a) In het Hoofdstuk Wachttijdtheorie staan twee modellen beschreven waarmee dit proces te caracteriseren is. Welke? Specificeer toestandsruimte en intensiteiten van het bijbehorende Markovproces volgens één van deze twee modellen.

b) Wat is het gemiddelde aantal machines dat werkt?

c) Wat is de fractie van de tijd dat beide monteurs tegelijk aan het werk zijn?

Opgave 6

DNA bestaat uit twee strengen bestaande uit de 4 DNA-bouwstenen adenine (A), cytosine (C), guanine (G) en thymine (T) die in een dubbele helix vervlochten zijn. De volgorde van A,G,C en T in de twee strengen is bepalend voor de functies van genen. Vergelijk van een nog niet onderzochte sequentie met een bekende sequentie kan informatie verschaffen over de functie hiervan.

Een maat om te beoordelen in hoeverre twee sequenties overeenkomen, is de lengte van de langste gemeenschappelijke deelsequentie. Bij voorbeeld, de twee strengen AGTC en GCAT hebben een langste gemeenschappelijke deelsequentie GT. GA is geen gemeenschappelijke deelsequentie. Je mag dus 'letters' weglaten, maar de volgorde niet veranderen. Het probleem is: *bepaal de langste gemeenschappelijke deelsequenties.*

Het idee voor de oplossing is gebaseerd op de volgende eigenschap.

Stel S1 en S2 zijn twee sequenties; S1' en S2' zijn de twee deelsequenties waarvan de meest rechtse letter is weggelaten, zeg letters C1 en C2. Met LGD(S1,S2) bedoelen we de Langse Gemeenschappelijke Deelsequentie van sequenties S1 en S2. Dan geldt:

$$\text{LGD(S1,S2)=langste LGD van} \begin{cases} \text{LGD}(\text{S1}, \text{S2}') & & (1) \\ \text{LGD}(\text{S1}', \text{S2}) & & (2) \\ \text{LGD}(\text{S1}', \text{S2}'), & \text{als } C1 \neq C2 & (3a) \\ (\text{LGD}(\text{S1}', \text{S2}'), \text{C1}), & \text{als } C1 = C2 & (3b) \end{cases}$$

a) Beargumenteer de correctheid van bovenstaande recursie. Je kunt zo zien hoeveel langste gemeenschappelijke deelsequenties AGTC en GCAT hebben. Welke zijn dit?

Dit geeft een methode om de LGD te bepalen via dynamisch programmeren. Het handigste is dat via een tabel te doen, die we van linksboven naar rechtsonder gaan vullen met als waarden de lengte van de langste gemeenschappelijk deelsequentie, en pijltjes om aan te geven hoe de betreffende waarde tot stand was gekomen, nl. via (1) $\leftarrow$, (2) $\uparrow$ of (3) $\nwarrow$. De eerste rij bevat dan de sequentie AGTC (S2) en de eerste kolom de sequentie GCAC (S1). De tweede rij en kolom bevatten alleen 0-en, want de LGD van 1 letter en een 'lege' sequentie heeft lengte 0. Een afspraak is altijd $\nwarrow$ te noteren als er meerdere keuzen zijn die tot dezelfde langste deelsequentie (van deelstrengen) leiden.

		A	G	T	C
	0	0	0	0	0
G	0	$\nwarrow$ 0	$\nwarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	
C	0				
A	0				
T	0				

b) Maak deze tabel af. Geef aan hoe je een langste gemeenschappelijke deelsequentie hieruit kunt vinden, alsmede de lengte hiervan. Hoe kun je *alle* langste gemeenschappelijke deelsequenties vinden?