Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2

25 januari 2017, 10:00–13:00

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen. Opgaven uit het dictaat mag je niet *zonder bewijs gebruiken.*

1. (a) Ontbind het element $7 + 9i \in \mathbb{Z}[i]$ als product van priemelementen.

(b) Hoeveel elementen van norm 130 zijn er in $\mathbb{Z}[i]$?

2. Ontbind het polynoom $X^3 + 5X^2 + X + 3$ in elk van de ringen $\mathbb{F}_2[X]$, $\mathbb{F}_3[X]$, $\mathbb{F}_5[X]$ en $\mathbb{Q}[X]$ in irreducibele factoren.

3. Gegeven $a \in \mathbb{Q}$, definieer een afbeelding $\phi_a \colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ door

$$\phi_a(f) = f(X + a).$$

(a) Laat zien dat ϕ_a een ringisomorfisme is.

(b) Bewijs dat, voor ieder polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$, de discriminant van $\phi_a(f)$ gelijk is aan de discriminant van f.

(c) Gebruik (b) samen met de formule

$$\Delta(X^3 + pX + q) = -4p^3 - 27q^2$$

om de discriminant van het polynoom $X^3 - 3X^2 + X - 2$ te berekenen.

4. Zij $R \subset \mathbb{Q}$ de deelverzameling

$$R = \left\{ \frac{a}{7^r} : a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

bestaande uit alle breuken waarvan de noemer een macht van 7 is.

(a) Laat zien dat R een deelring van $\mathbb{Q}$ is.

(b) Wat zijn de eenheden in R?

(c) Laat zien dat R isomorf is met de ring $\mathbb{Z}[X]/(7X - 1)$.

5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

(a) Een $\mathbb{Z}$-moduul met 24 elementen en exponent 12;

(b) een ring R en een linksideaal van R dat geen rechtsideaal is;

(c) een torsiemoduul over $\mathbb{Z}$ waarvan de annihilator nul is.