Uitwerkingen tentamen Lineaire Algebra 2
16 januari, 2015

Deze uitwerkingen zijn niet volledig, maar geven het idee van elke opgave aan. Voor een volledige oplossing moet alles ook nog duidelijk uitgewerkt worden.
Opgave 1 (10 punten). Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat

$$B = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(c) Bepaal B^{1000}.

Oplossing.

(a) Het karakteristiek polynoom van A is $(t-1)^2(t-2)$. De eigenwaarden zijn dus 1 (met algebraïsche multipliciteit 2) en 2 (met algebraïsche multipliciteit 1). Bij het de eigenwaarde 2 hoort dus één Jordanblok, namelijk het (1×1)-blok (2). Voor eigenwaarde 1 kijken we naar de eigenruimte $E_1(A) = \ker(A - I)$. Omdat $A - I$ rang 2 heeft is deze kern 1-dimensionaal, dus er hoort bij eigenwaarde 1 maar één Jordanblok, dat dus gelijk is aan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. We krijgen dus

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Voor een bijbehorende basistransformatie hebben we nodig drie vectoren v_1, v_2, v_3 met $v_3 \in E_2(A) = \ker(A - 2I)$ en $v_2 \in \ker(A - I)^2$ maar $v_2 \notin \ker(A - I)$ en $v_1 = (A - I)v_1$. Als je deze kernen uitrekent zie je dat je kunt nemen $v_2 = e_2 = (0, 1, 0)$ en dus $v_1 = (A - I)v_2 = -e_1 = (-1, 0, 0)$. De vector $v_3 = (0, 1, -1)$ brengt de kern van $A - 2I$ voort, dus we kunnen nemen

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

met de vectoren v_1, v_2, v_3 als kolommen.

(b) Het karakteristiek polynoom van B is $(t+1)^2$, dus er is slechts één eigenwaarde: -1. Nu kunnen net als in onderdeel (a) de Jordannormaalvorm bepalen, maar hier is een alternatieve methode. De Jordannormaalvorm J bestaat uit één (2×2)-Jordanblok of uit twee (1×1)-Jordanblokken.
[In het laatste geval zou de Jordannormaalvorm gelijk zijn aan $-I$, en zou er een inverteerbare matrix Q zijn met $B = Q \cdot (-I) \cdot Q^{-1} = -I$, wat niet het geval is. De Jordannormaalvorm is dus $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, maar dit hebben we niet eens nodig.]
Er is dus een inverteerbare Q met $B = Q^{-1}JQ$ en er geldt $J = -I + M$ met M nilpotent. Dus $B = Q^{-1} \cdot (-I) \cdot Q + Q^{-1} \cdot M \cdot Q = D + N$ met $D = -I$ diagonaal en $N = Q^{-1} \cdot M \cdot Q$ nilpotent. Er geldt inderdaad $DN = ND$. We hadden al $D = -I$ en vinden dus

$$N = B - D = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(c) Er geldt $N^2 = 0$. Omdat N en D commuteren geldt

$$\begin{aligned} B^{1000} &= (D+N)^{1000} = D^{1000} + 1000D^{999} \cdot N + (\text{termen die veelvouden zijn van } N^2 = 0) \\ &= I - 1000N = \begin{pmatrix} -2999 & -9000 \\ 1000 & 3001 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 2 (9 punten). Zij A een reële 17×17 matrix en I de 17×17 identiteitsmatrix. Voor enkele waarden van λ en k is de rang van $(A - \lambda I)^k$ gegeven in de volgende tabellen.

M	$\text{rk}(M)$
$A - 3I$	14
$(A-3I)^2$	12
$(A-3I)^3$	10
$(A-3I)^4$	10

M	$\text{rk}(M)$
$A - 2I$	14
$(A-2I)^2$	11
$(A-2I)^3$	11
$A - I$	13

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A.

(b) Bepaal het karakteristiek polynoom van A.

(c) Bepaal het minimum polynoom van A.

Oplossing.

(a) Het is nuttiger om de dimensie van de kernen te kennen. Die zijn

M	$\dim\ker(M)$
$A - 3I$	3
$(A-3I)^2$	5
$(A-3I)^3$	7
$(A-3I)^4$	7

M	$\dim\ker(M)$
$A - 2I$	3
$(A-2I)^2$	6
$(A-2I)^3$	6
$A - I$	4

Er zijn dus 3 blokken voor eigenwaarde 3, waarvan $5 - 3 = 2$ van grootte minstens 2 en $7 - 5 = 2$ van grootte minstens 3 en $7 - 7 = 0$ van grootte minstens 4. Dit betekent twee van grootte 3 en nul van grootte 2 en één van grootte 1. De gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 3 heeft dus dimensie 7. Voor eigenwaarde 2 vinden we net zo dat er drie blokken van grootte 2 zijn en geen andere blokken. De gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 2 heeft dus dimensie 6. Er zijn vier blokken bij eigenwaarde 1. De gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 1 heeft dus dimensie minstens 4 en hoogstens $17 - 7 - 6 = 4$, dus precies 4. Dat betekent dat de Jordannormaalvorm bestaat uit

- twee Jordan-blokken van grootte 3×3 bij eigenwaarde 3,
- één Jordan-blok van grootte 1×1 bij eigenwaarde 3,
- drie Jordan-blokken van grootte 2×2 bij eigenwaarde 2, en
- vier Jordan-blokken van grootte 1×1 bij eigenwaarde 1.

(b) Het karakteristiek polynoom van A is gelijk aan dat van zijn Jordannormaalvorm. Dat is een bovendriehoeksmatrix dus het karakteristiek polynoom is makkeiljk te bepalen. Het is gelijk aan

$$(t-3)^7(t-2)^6(t-1)^4.$$

(c) In het minimum polynoom zitten de zelfde lineaire factoren met als exponent de lengte van het grootste Jordan-blok bij die eigenwaarde (want voor een $k \times k$ Jordanblok J voor eigenwaarde λ geldt $(J - \lambda I)^{k-1} \neq 0$ en $(J - \lambda I)^k = 0$). We vinden dus

$$(t-3)^3(t-2)^2(t-1).$$

Opgave 3 (9 punten). Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 5x^2 - 12xy - 4y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat

$$D = Q^\top AQ.$$

(c) Bepaal twee reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$q\big(f(u, v)\big) = au^2 + bv^2$$

voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

(d) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel gegeven door $x^2 + y^2 = 1$?

Oplossing.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) Zie Example 10.10 in het dictaat. De eigenwaarden van A zijn -7 en 8. Bijbehorende eigenvectoren zijn $(1,2)$ en $(2,-1)$. Na schalen krijgen we

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad D = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Inderdaad voldoen deze matrices aan $QQ^\top = I$ en $D = Q^\top AQ$.

(c) Uit (b) volgt dat we kunnen nemen $a = -7$ en $b = 8$ en $f(z) = Qz$ voor $z \in \mathbb{R}^2$.

(d) Omdat f orthogonaal is, beeldt het de eenheidcirkel af op de eenheidscirkel. We mogen dus ook de waarden van $-7u^2+8v^2$ bepalen op de eenheidscirkel $u^2+v^2 = 1$. Op die cirkel is $-7u^2 + 8v^2 = -7(1-v^2) + 8v^2 = 15v^2 - 7$. Omdat u^2 en v^2 niet-negatief zijn, doorloopt v^2 precies de waarden in het interval $[0,1]$, dus we krijgen precies de waarden tussen -7 en 8, waarbij -7 en 8 bereikt worden voor $(u,v) = (1,0)$ en $(u,v) = (0,1)$. Dus de bereikte waarden vormen het gesloten interval $[-7,8]$.

Opgave 4 (10 punten). Zij V de vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit 2. Definieer de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,dx. \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat φ een inproduct is.

(b) Geef een orthogonale basis voor de inproductruimte V met dit inproduct.

(c) Zij $T\colon V \to V$ de afbeelding gedefinieerd door $T(f) = f'$ waarbij f' de afgeleide is van f. Is T normaal?

Oplossing.

(a) Elk van de drie eisen in Definition 9.1 is makkelijk te checken. Zie ook voorbeeld 9.3.

(b) We beginnen met een basis $1, x, x^2$ en passen Gram-Schmidt toe. Omdat we alleen orthogonaliteit eisen en niet orthonormaliteit mogen we de normalisatiestap weglaten. We vinden dan de basis

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = x - \tfrac{1}{2}, \qquad f_3 = x^2 - x + \tfrac{1}{6}.$$

(c) We kunnen dit doen door Propositie 9.17 en Corollary 9.18 te gebruiken. Dat vergt een ortho*normale* basis! Maar in plaats van de basisvectoren uit (b) expliciet te schalen, is het voldoende te zeggen dat er niet-nul constanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zijn zodanig dat $B = (f_1, \alpha f_2, \beta f_3)$ een orthonormale basis is. Omdat er geldt $f_3' = f_2$ en $f_2' = f_1$ vinden we

$$A = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix voldoet niet aan $AA^\top = A^\top A$ (schrijf dat uit!), dus A en daarmee T is niet normaal.

Er zijn ook alternatieve methoden die geen matrices gebruikt. De vraag is of voor elke f geldt $(T \circ T^*)(f) = (T^* \circ T)(f)$. Voor $f = 1$ geldt $T'(1) = 0$, dus $T^*(T(1)) = 0$. Het is dus voldoende om te laten zien dat $T(T^*(1)) \neq 0$, dus het is voldoende om te laten zien dat $T^*(1)$ niet een constante is. Dat volgt bijvoorbeeld uit het feit dat als $T^*(1) = c$ een constante was, dat er dan zou er gelden

$$c = \int_0^1 c \cdot 1\, dx = \langle c, 1\rangle = \langle T^*(1), 1\rangle = \langle 1, T(1)\rangle = \langle 1, 0\rangle = 0,$$

wat in tegenspraak is met

$$\tfrac{1}{2}c = \int_0^1 cx\, dx = \langle c, x\rangle = \langle T^*(1), x\rangle = \langle 1, T(x)\rangle = \langle 1, 1\rangle = 1.$$

Een andere alternatieve methode gebruikt de spectraalstelling, Theorem 10.6, maar daarbij moet je wel oppassen dat die stelling gaat over *complexe* inproductruimten! A priori betekent het niets om te zeggen dat we T bekijken "over $\mathbb{C}$", omdat V een *reële* vectorruimte is. Wel kunnen we kijken naar de vectorruimte van complexe polynomen van graad hooguit 2, die we aanduiden met $V_\mathbb{C}$. Voor de lineaire afbeelding analoog aan T schrijven we $T_\mathbb{C}\colon V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$. Merk op dat T de beperking van $T_\mathbb{C}$ is tot $V \subset V_\mathbb{C}$. Om de spectraalstelling te mogen gebruiken hebben we nu wel een complex inproduct nodig. Dat bestaat ook, want we kunnen nemen

$$\begin{aligned} \varphi'\colon V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx. \end{aligned}$$

Merk ook op dat de beperking van φ' tot $V \times V$ gelijk is aan φ.

Als $T_\mathbb{C}$ normaal zou zijn geweest, dan was $T_\mathbb{C}$ volgens de spectraalstelling diagonaliseerbaar. Omdat $T_\mathbb{C}$ ook nilpotent is (drie keer afleiden geeft 0) is $T_\mathbb{C}$ een diagonaliseerbare nilpotente afbeelding, dus $T_\mathbb{C} = 0$ (het minimumpolynoom van $T_\mathbb{C}$ is van de vorm x^n omdat $T_\mathbb{C}$ nilpotent is, en we hebben $n = 1$ omdat $T_\mathbb{C}$ diagonaliseerbaar is). Maar $T_\mathbb{C} \neq 0$, en uit deze tegenspraak concluderen we dat $T_\mathbb{C}$ niet normaal is.

Nu moeten we nog concluderen dat T zelf niet normaal is. Dit kan bijvoorbeeld door te kijken naar $T \circ T^*$ op een basis voor V, of door alles te vertalen naar matrices en Propositions 9.17 en 9.18 te gebruiken.

Opgave 5 (7 punten). Zij V een eindig-dimensionale reële inproductruimte. Zij $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding die voldoet aan

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

voor alle $v, w \in V$.

(a) Bewijs dat f een isomorfisme en dus een isometrie is.

(b) Bewijs dat voor de geadjungeerde (Engels: *adjoint*) f^* van f geldt:

$$f^* = f^{-1}.$$

[Volgens Propositie 9.15 uit het dictaat volgt dit direct uit het feit dat f een isometrie is. Dat mag je hier niet gebruiken, maar kun je wel zelf opnieuw bewijzen.]

Oplossing.

(a) We bewijzen dat f injectief is: als $f(v) = 0$ voor een zekere $v \in V$, dan geldt $\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0$, dus $v = 0$. Dus is f inderdaad injectief. Het domein en het codomein van f zijn beide gelijk aan V en hebben dus de zelfde eindige dimensie. Dat impliceert dat f ook surjectief en dus een isomorfisme is.

(b) Zie Proposition 9.15.