Uitwerkingen Lineaire algebra I
Tentamen, donderdag 21 januari, 2016

Geen rekenmachines, dictaat of aantekeningen. **Motiveer elk antwoord!**

Opgave 1 (7 punten).

(a) We kunnen het systeem ook schrijven als $Ax = b$ met

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ -1 & a & 4 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De determinant van A is $a(a-2)^2$, dus voor $a \notin \{0, 2\}$ is de determinant ongelijk aan 0 en is A inverteerbaar en is er precies één oplossing. Voor $a = 0$ is er wegens de derde vergelijking ($0 = 2$) geen enkele oplossing, dus er blijft alleen $a = 2$ over. Daar zijn inderdaad oneindig veel oplossingen, zoals we in (b) zullen zien. Het antwoord is dus $a = 2$.

(b) We brengen voor $a = 2$ de uitgebreide matrix $(A|b)$ in reduced row echelon form en krijgen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Er staat geen pivot in de kolom rechts van de streep, dus er zijn oplossingen. De oplossingen krijgen we door de coördinaten die horen bij kolommen (voor de streep) zonder pivot (dus de derde) vrij te kiezen en de overige coördinaten uit te rekenen. Noemen we die derde coördinaat $x_3 = t$, dan vinden we wegens de tweede rij in de row echelon form

$$x_2 + x_3 = 1,$$

dus $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$. Wegens de eerste rij krijgen we

$$x_1 - 2x_3 = -1,$$

dus $x_1 = -1 + 2x_3 = -1 + 2t$. De oplossingsverzameling is dus

$$\{\, (-1 + 2t, 1 - t, t) \;:\; t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Uiteraard is het verstandig om even te checken dat dit inderdaad allemaal oplossingen zijn!

Opgave 2 (6 punten). Het vlak V en de lijn L gaan door 0. De lijn wordt opgespannen door een normaal van V, dus door de vector van coëfficiënten in de vergelijking $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$, namelijk $a = (1, -2, 2)$.

De afstand van p tot L is de lengte van de projectie p_2 van p op V.

We berekenen eerst de projectie van p op L, namelijk $p_1 = \lambda a$ met

$$\lambda = \frac{\langle a, p \rangle}{\langle a, a \rangle} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

De projectie van p op V is dan

$$p_2 = p - p_1 = p - \lambda a = (2, -1, 1) - \tfrac{2}{3}(1, -2, 2) = \tfrac{1}{3}(4, 1, -1)$$

Zoals gezegd, de afstand van p tot L is de lengte van p_2, dus $\frac{1}{3}\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Opmerking: Je kunt ook Pythagoras gebruiken:

$$\|p_2\|^2 = \|p\|^2 - \|p_1\|^2 = \|p\|^2 - \lambda^2 \|a\|^2 = 6 - 4 = 2.$$

Opgave 3 (8 punten).

(a) De determinant van $[f]_B^B$ (en dus van f) is -5 (reken na), dus niet 0, dus f is een isomorfisme.

(b) We laten zien dat v_1', v_2', v_3' lineair onafhankelijk zijn. Stel

$$0 = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \lambda_3 v_3'.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(v_2 + v_3) + \lambda_2(v_1 + v_3) + \lambda_3(-v_1 + 2v_2) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_3)v_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)v_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_3. \end{aligned}$$

Omdat v_1, v_2, v_3 lineair onafhankelijk zijn, volgt

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Hieruit los je makkelijk op dat $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (eventueel zelfs met behulp van matrices).

De elementen v_1', v_2', v_3' zijn dus drie lineair onafhankelijke vectoren in een vectorruimte van dimensie 3, dus ze vormen een basis.

(c) Er geldt

$$[f]_{B'}^{B'} = [\mathrm{id}]_{B'}^{B} \cdot [f]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^{B'} = Q^{-1} \cdot [f]_B^B \cdot Q$$

met

$$Q = [\mathrm{id}]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

waarin de coëfficiënten van v_i' ten opzichte van B als kolom staan voor $i = 1, 2, 3$. Dan berekenen we

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en uiteindelijk

$$[f]_{B'}^{B'} = Q^{-1} \cdot [f]_B^B \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 (10 punten). Alle uitspraken zijn ONWAAR. Hieronder volgen tegenvoorbeelden

(a) $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ met $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B = 0$ en $\operatorname{Tr}(AB) = 2$.

(b) Neem U, V, W drie willekeurige verschillende lijnen, bijvoorbeeld U voortgebracht door $(1,1)$ en V door $(1,0)$ en W door $(0,1)$. Dan geldt $U \cap V = U \cap W = \{0\}$, dus het rechterlid is $\{0\}$. Maar $V + W = \mathbb{R}^2$, dus het linkerlid is $U \neq \{0\}$.

(c) Neem $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dan hebben A en A' beide spoor en determinant 0. Maar ze hebben verschillende rang, dus ze zijn niet gelijkvormig.

(d) De vectorruimte $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ heeft basis $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ met

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voor elke vier matrices $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$ is er dus een lineaire afbeelding

$$\varphi\colon \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$$

die A_i stuurt naar N_i voor $i = 1, 2, 3, 4$. Bijvoorbeeld kunnen we kiezen

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad N_2 = N_3 = N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze keuze geeft een lineaire afbeelding φ waarvoor geen M te vinden is die aan de eisen voldoet, want dan zou moeten gelden $MA_1 = N_1$. Maar de laatste kolom van A_1 is 0, dus die van MA_1 ook, terwijl die van N_1 dat niet is.

(e) Neem het endomorfisme van de vectorruimte $\mathbb{R}[x]$ van polynomen die een polynoom f stuurt naar $x \cdot f$.

Opmerking: Voor eindig-dimensionale vectorruimtes is de uitspraak wel waar.

Opgave 5 (8 punten).

(a) Uit $M_n \cdot v = \lambda v$ volgt of $\lambda = 0$ of v zit in het beeld van M_n. Omdat het beeld van M_n wordt voortgebracht door $a = (1, 1, 1, \ldots, 1)$ is v in dat laatste geval een veelvoud van a met als eigenwaarden n, want $M_n \cdot a = na$. Het eerste geval (dus $\lambda = 0$) komt inderdaad voor, want de eigenruimte voor eigenwaarde 0 is gelijk aan de kern van M_n en $\dim(\ker M_n) = n - \dim(\operatorname{im} M_n) = n - 1 \geq 1$. De eigenwaarden zijn dus 0 en n.

(b) De eigenruimte voor $\lambda = 0$ (dus de kern van M_n) heeft dimensie $n - 1$. De eigenruimte voor $\lambda = n$ is bevat in het beeld van M_n en heeft dus dimensie 1. Nemen we van beide eigenruimtes een basis, dan vormen die twee bases samen een lineair onafhankelijk rijtje van $(n-1)+1 = n$ vectoren en dus een basis voor $\mathbb{R}^n$. Er is dus een basis van eigenvectoren, dus M_n is diagonaliseerbaar.

(c) Omdat M_n diagonaliseerbaar is, zijn voor beide eigenwaarden de algebraïsche en meetkundige multipliciteit gelijk. Het karakteristiek polynoom is dus $t^{n-1}(t - n)$.

(d) Er geldt $N_n = M_n + I_n$, wat we ook kunnen schrijven als $N_n = -(-I_n - M_n)$. Hieruit volgt

$$\det N_n = (-1)^n \cdot \det(-1 \cdot I_n - M_n) = (-1)^n \cdot P_{M_n}(-1) = (-1)^n \cdot ((-1)^{n-1}(-1 - n)) = n + 1.$$

Opmerking: Je kunt zowel de determinant van N_n als het karakteristiek polynoom van M_n ook vinden door slim te vegen tot een boven- of benedendriehoeksmatrix. In dat geval is het handig om eerst onderdeel (c) en dan pas (a) en (b) te doen.

Opgave 6 (6 punten). We willen laten zien dat $(\operatorname{im} f)+(\ker f) = V$. Omdat V eindig-dimensionaal is en er sowieso geldt $(\operatorname{im} f) + (\ker f) \subset V$, is het voldoende om te laten zien dat

$$\dim((\operatorname{im} f) + (\ker f)) = \dim V.$$

Uit de dimensieformule voor lineaire deelruimtes volgt

$$\dim((\operatorname{im} f) + (\ker f)) = \dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f) - \dim((\operatorname{im} f) \cap (\ker f)) = \dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f).$$

Wegens de dimensieformule voor lineaire afbeeldingen geldt $\dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f) = n$, dus volgt inderdaad $\dim((\operatorname{im} f) + (\ker f)) = \dim V$.

Zoals gezegd volgt hieruit $(\operatorname{im} f) + (\ker f) = V$ en samen met het gegeven $(\operatorname{im} f) \cap (\ker f) = \{0\}$ volgt dat $\operatorname{im} f$ en $\ker f$ inderdaad complementaire ruimtes zijn.

Opmerking: Sommige mensen dachten dat uit het gegeven volgt dat f injectief is, maar dat hoeft niet zo te zijn.