Tentamen Lineaire Algebra 2

14 april, 2016
14:00-17:00

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs al je antwoorden. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1 (5 punten). Schrijf duidelijk je naam, je emailadres, je universiteit (Delft of Leiden), je studentnummer bij je eigen universiteit en je studentnummer in Leiden op.

Opgave 2 (10 punten). Beschouw de reële matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat

$$A = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(c) Bepaal (voor elke $t \in \mathbb{R}$)

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

Op de achterkant van dit vel staan nog meer opgaven.

Opgave 3 (7 punten). Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat

$$D = Q^\top A Q.$$

Opgave 4 (7 punten). Zij $V \subset \mathbb{C}^4$ de deelruimte gegeven door

$$V = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4)\ :\ x_1 + x_2 + x_3 = ix_4\ \}.$$

(a) Geef een basis voor V als vectorruimte over $\mathbb{C}$.
(b) Geef een basis voor V als vectorruimte over $\mathbb{R}$.
(c) Geef een orthonormale basis voor V als vectorruimte over $\mathbb{C}$ met het standaard Hermites inproduct gegeven door

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i \overline{y_i}$$

voor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Opgave 5 (7 punten). Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positief definiet?

Opgave 6 (7 punten). Bepaal alle reële getallen $x, y \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix

$$N = \begin{pmatrix} -x & -y \\ 4y & 3 \end{pmatrix}$$

nilpotent is.

Opgave 7 (7 punten). Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ een vlak dat het punt $(0, 0, 0)$ bevat. Laat zien dat de spiegeling in V gegeven wordt door een symmetrische 3×3 matrix.