Hertentamen Lineaire Algebra 2

29 april, 2015
10:00-13:00

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs al je antwoorden en geef al je berekeningen. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 0 (5 punten). Schrijf duidelijk je naam, je emailadres, je universiteit (Delft of Leiden), je studentnummer bij je eigen universiteit en je studentnummer in Leiden op.

Opgave 1 (10 punten). Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat

$$B = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(c) Bepaal $\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$.

Opgave 2 (9 punten). Zij M een reële 17×17 matrix van rang $\mathrm{rk}(M) = 10$ en spoor $\mathrm{Tr}(M) = 0$ waarvoor geldt $M^3 = M$.
[Het spoor (Engels: trace) $\mathrm{Tr}(M)$ van M is de som van de diagonaalelementen van M.]

(a) Bepaal het minimum polynoom van M.

(b) Bepaal de eigenwaarden van M.

(c) Bepaal een Jordannormaalvorm voor M.

(d) Bepaal het karakteristiek polynoom van M.

Op de achterkant van dit vel staan nog drie opgaven.

Opgave 3 (9 punten). Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 8x^2 + 8xy - 7y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat

$$D = Q^\top AQ.$$

(Bewijs ook dat Q orthogonaal is.)

(c) Bepaal twee reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$q\big(f(u, v)\big) = au^2 + bv^2$$

voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

(d) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel gegeven door $x^2 + y^2 = 1$? (Leg uit!)

Opgave 4 (10 punten). Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak met normaalvector $a = (1, -1, 2)$ en $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn voortgebracht door a.
Zij $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een rotatie om L over $\pi/2$.
Zij $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in V.
Zij $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de projectie op V.

(a) Geef een orthonormale basis voor V en L.
(b) Geef van elk van de drie afbeeldingen ρ, σ, τ aan of die *normaal* is.
(c) Geef van elk van de drie afbeeldingen ρ, σ, τ aan of die *zelf-geadjungeerd* (Engels: self adjoint) is.
(d) Geef van elk van de drie afbeeldingen ρ, σ, τ aan of die een *isometrie* is.

Opgave 5 (7 punten). Laat V een eindigdimensionale vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$, en laat $b\colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ een bilineaire afbeelding zijn die niet gedegenereerd is. Laat zien dat er voor elke $f \in V^*$ een $v \in V$ is zodanig dat voor alle $g \in V^*$ geldt $b(f, g) = g(v)$.