Lineaire algebra I
Donderdag 27 augustus, 2015

Geen rekenmachines, telefoons, dictaat of aantekeningen. **Motiveer elk antwoord!**

Opgave 1 (9 punten). Zij B de reële matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van B en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix Q zodanig dat geldt

$$D = Q^{-1}BQ.$$

(c) Bereken B^{2015}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 17^{2015} laten staan.

Opgave 2 (6 punten). Gegeven is de reële matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef een basis voor de lineaire deelruimte $(\ker M)^{\perp}$. Beargumenteer ook dat dit inderdaad een basis is!

Opgave 3 (8 punten). We definiëren de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Voor alle reële getallen $r \in \mathbb{R}$ definiëren we de afbeelding $h_r \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$h_r(x) = A \cdot x + rB \cdot x$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^3$. Verder definiëren we de vector

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke $r \in \mathbb{R}$ is 0 een eigenwaarde van h_r?

(b) Voor welke $r \in \mathbb{R}$ is b bevat in het beeld van h_r?

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 4 (8 punten). Zij $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ de vectorruimte van alle reële 2×2 matrices met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging, met basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

We definiëren de matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zij $g\colon V \to V$ de afbeelding die $M \in V$ stuurt naar $QMQ^\top$.

(a) Bepaal de matrix $[g]_B^B$.
(b) Wat is de rang van g?

Opgave 5 (7 punten). Zij $H \subset \mathbb{R}^5$ het hyperoppervlak met normaal $a = (-2, 3, 1, 0, 5)$, dus $H = \{a\}^\perp$. Zij $\pi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ de projectie op H en zij A de 5×5 matrix die π beschrijft ten opzichte van de standaard basis, dus $\pi = f_A$.
[Waarschuwing: je hoeft A niet uit te rekenen]

(a) Is A inverteerbaar?
(b) Wat zijn de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimtes van A?
[Bewijs dat je alle eigenwaarden gevonden hebt!]
(c) Is A diagonaliseerbaar?

Opgave 6 (7 punten). Zij U, V, W vectorruimtes over $\mathbb{R}$ en $f\colon U \to V$ en $g\colon V \to W$ lineaire afbeeldingen.

(a) Bewijs dat er geldt $\mathrm{rk}(g \circ f) \leq \mathrm{rk}(g)$.
(b) Laat zien dat er gelijkheid geldt dan en slechts dan als $\ker(g) + \mathrm{im}(f) = V$.

[Zoals gebruikelijk staan $\mathrm{rk}(f), \ker(f)$ en $\mathrm{im}(f)$ voor resp. de rang, de kern en het beeld van f.]