Hertentamen Inleiding Kansrekening

4 juli 2016, 14:00–17:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit hertentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 8 vragen. Elke vraag is een aantal punten waard, dat vetgedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is niet voldoende. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

---

(1) [**R**]

(a) [**5**] Waar moet een gebeurtenis A aan voldoen opdat die onafhankelijk van zichzelf is?

(b) [**5**] Gegeven zijn twee gebeurtenissen A en B met $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{9}$ en $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$. Geef de beste ondergrens voor $\mathbb{P}(A \cap B^c)$.

(2) [**T**] Zij X de $\mathbb{N}$-waardige stochast met kansmassafunctie

$$p_X(n) = \begin{cases} C, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{1}{2}C, & N < n \leq 2N, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [**5**] Bereken C.

(b) [**5**] Bereken $\mathbb{E}(X \mid X > N)$.

(3) [**T**] Zij X de $(0, \infty)$-waardige stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx, & x \in (0, 10), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [**5**] Bereken C.

(b) [**5**] Bereken de moment-genererende functie van X.

(4) **[T]** Zij (X, Y) het paar $(0, \infty)$-waardige stochasten met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C|x^{-1} - y^{-1}|, & x, y \in [1, 2], \\ 0, & \text{elders}, \end{cases}$$

waar $C^{-1} = 2(\log 2 - 1)$.

(a) **[7]** Bereken $f_Y(y)$.

(b) **[8]** Bereken $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.

(5) **[T]** Zij U de uniform verdeelde stochast op $[-2, 2]$.

(a) **[7]** Bereken de kansdichtheidsfunctie van de stochast $V = U^3$.

(b) **[8]** Bereken $\mathbb{E}(V \mid V > 0)$.

(6) **[R]** Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2\}$, startverdeling $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) **[7]** Bereken $\mathbb{P}(X_2 = 1)$.

(b) **[8]** Bereken $\mathbb{P}(X_0 = 1 \mid X_2 = 1)$.

(7) **[R]** Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) **[5]** Is X irreducibel? Is X aperiodiek?

(b) **[5]** Heeft X een unieke stationaire kansverdeling π? Zo ja, wat is die?

(8) **[I]** Zij $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke, identiek verdeelde, $\mathbb{R}$-waardige stochasten met gemiddelde $\mu \in \mathbb{R}$ en variantie $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Voor $n \in \mathbb{N}$, zij $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ het empirisch gemiddelde van de eerste n stochasten.

(a) **[7]** Hoe luidt de zwakke wet van de grote aantallen voor $\bar{X}_n$, $n \to \infty$?

(b) **[8]** Geef het bewijs van deze wet met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev.

(1) (a) Uit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$ volgt dat $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

(b) Omdat $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cup B^c)$ en $\mathbb{P}(A \cup B^c) \leq 1$, volgt dat $\mathbb{P}(A \cap B^c) \geq \frac{8}{9} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{9}$. Met behulp van een Venn-diagram volgt dat gelijkheid geldt wanneer $B \subset A$.

(2) (a) Bereken $1 = \sum_{n=1}^{N} C + \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2} C = C(N + \frac{1}{2}N) = \frac{3}{2} CN$. Derhalve $C = \frac{2}{3N}$.

(b) Er geldt $\mathbb{P}(X > N) = \frac{1}{3}$. Derhalve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid X > N) &= \frac{\mathbb{E}(X\, 1_{\{X>N\}})}{\mathbb{P}(X > N)} \\ &= 3 \sum_{n=N+1}^{2N} n\, \frac{1}{3N} = \frac{1}{N}\, \frac{N}{2}\, [(N+1) + 2N] = \frac{1}{2}(3N+1).\end{aligned}$$

(3) (a) Bereken $1 = \int_0^{10} dx\, Cx = C \frac{1}{2}(10)^2 = 50C$. Derhalve $C = \frac{1}{50}$.

(b) Bereken, met behulp van partiële integratie,

$$\begin{aligned}M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_0^{10} dx\, e^{tx}\, \tfrac{1}{50} x = \left[t^{-1} e^{tx}\, \tfrac{1}{50} x\right]_{x=0}^{x=10} - \int_0^{10} dx\, t^{-1} e^{tx}\, \tfrac{1}{50} \\ &= t^{-1} e^{10t}\, \tfrac{1}{5} - \left[t^{-2} e^{tx}\, \tfrac{1}{50}\right]_{x=0}^{x=10} = t^{-1} e^{10t}\, \tfrac{1}{5} - t^{-2} e^{10t}\, \tfrac{1}{50} + t^{-2}\, \tfrac{1}{50} \\ &= t^{-2}\, \tfrac{1}{50}\, [(10t - 1)\, e^{10t} + 1].\end{aligned}$$

Deze functie heeft $\mathbb{R}$ als domein. Merk op dat $\lim_{t \to 0} M_X(t) = M_X(0) = 1$.

(4) (a) Er geldt $f_Y(y) = \int_1^2 dx\, f_{X,Y}(x, y)$. Dit is gelijk aan C keer

$$\begin{aligned}&\int_1^y dx\, (x^{-1} - y^{-1}) + \int_y^2 dx\, (y^{-1} - x^{-1}) \\ &= [\log x - xy^{-1}]_{x=1}^{x=y} + [xy^{-1} - \log x]_{x=y}^{x=2} \\ &= (\log y - 1 + y^{-1}) + (2y^{-1} - \log 2 - 1 + \log y) \\ &= 3y^{-1} + 2\log y - \log 2 - 2.\end{aligned}$$

(b) Er geldt

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int_1^2 dx\, x\, \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

De noemer hebben we in (a) uitgerekend. De teller berekenen we op analoge wijze en is gelijk aan C keer

$$\begin{aligned}
&\int_1^y dx\, x\,(x^{-1} - y^{-1}) + \int_y^2 dx\, x\,(y^{-1} - x^{-1}) \\
&= [x - \tfrac{1}{2}x^2y^{-1}]_{x=1}^{x=y} + [\tfrac{1}{2}x^2y^{-1} - x]_{x=y}^{x=2} \\
&= (y - \tfrac{1}{2}y - 1 + \tfrac{1}{2}y^{-1}) + (2y^{-1} - 2 - \tfrac{1}{2}y + y) \\
&= \tfrac{5}{2}y^{-1} - 3 + y.
\end{aligned}$$

Derhalve

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \frac{\tfrac{5}{2}y^{-1} - 3 + y}{3y^{-1} + 2\log y - \log 2 - 2}.$$

(5) (a) V neemt waarden aan in $[-8, 8]$. De cumulatieve verdelingsfunctie van V is op dit interval gelijk aan

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \le v) = \mathbb{P}(U^3 \le v) = \tfrac{1}{4}\int_{-2}^2 du\, 1_{\{u^3 \le v\}} = \tfrac{1}{4}\,(v^{1/3} + 2).$$

Door te differentiëren vinden we $f_V(v) = \frac{1}{12}|v|^{-2/3}$.

(b) Omdat $\mathbb{P}(V > 0) = \frac{1}{2}$, volgt

$$\mathbb{E}(V \mid V > 0) = \frac{\mathbb{E}(V\, 1_{\{V>0\}})}{\mathbb{P}(V > 0)} = 2\int_0^8 dv\, v f_V(v) = \tfrac{1}{6}\int_0^8 dv\, v^{1/3} = 2.$$

(6) (a) Er geldt $\mathbb{P}(X_2 = 1) = (\lambda P^2)_1$ met

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{43}{64} & \frac{21}{64} \\ \frac{18}{64} & \frac{46}{64} \end{pmatrix}.$$

Derhalve $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}(\frac{43}{64} + \frac{18}{64}) = \frac{61}{128}$.

(b) Er geldt, vanwege de regel van Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = 1 \mid X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1)\,\frac{\mathbb{P}(X_0 = 1)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} \\
&= (P^2)_{11}\,\frac{\frac{1}{2}}{\frac{61}{128}} = \frac{43}{64}\,\frac{\frac{1}{2}}{\frac{61}{128}} = \frac{43}{61}.
\end{aligned}$$

(7) (a) Vanuit 1 en 3 kan 2 niet bereikt worden. De Markovketen is derhalve niet irreducibel. Vanuit 1 kan er in één stap naar 1 worden teruggekeerd en idem voor 3. De Markovketen is derhalve aperiodiek.

(b) Er is een unieke stationaire verdeling, en die wordt gegeven door $\pi = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

(8) (a) De zwakke wet van de grote aantallen luidt

$$\forall \epsilon > 0: \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon\big) = 0.$$

(b) De ongelijkheid van Chebyshev geeft

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\,\mathbb{E}\big((\bar{X}_n - \mu)^2\big).$$

Echter

$$\mathbb{E}\big((\bar{X}_n - \mu)^2\big) = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right]^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big((X_i - \mu)^2\big) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Omdat dit naar nul convergeert als $n \to \infty$, volgt de zwakke wet.