Hertentamen Inleiding Kansrekening

5 juli 2017, 14:00–17:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan, wel het gebruik van rekenmachine. Er zijn 8 vragen, elk met twee of drie onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vet gedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op *elk* blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is *niet* voldoende. Elke berekening dient van een *toelichting* te worden voorzien.

---

(1) [**R**] Gegeven zijn vier gebeurtenissen A_1, A_2, A_3, A_4 met kansen $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{3}$.

(a) [**6**] Laat zien dat

$$\tfrac{1}{3} \leq \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \leq \tfrac{19}{20}.$$

(b) [**4**] Geef voorbeelden, aan de hand van een Venn-diagram, waaruit blijkt dat de ondergrens en de bovengrens bereikt kunnen worden.

(2) [**R**] Zij A de gebeurtenis dat de ijssalon morgen open is. Zij B_i, $i = 1, 2$, de gebeurtenis dat morgen de maximale temperatuur $20 + 10i$ graden Celsius is. Het weerbericht meldt dat $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$ en $\mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{3}$. De eigenaar van de ijssalon meldt dat $\mathbb{P}(A \mid B_1) = \frac{1}{4}$ en $\mathbb{P}(A \mid B_2) = \frac{3}{4}$.

(a) [**5**] Bereken $\mathbb{P}(A)$.

(b) [**5**] Bereken $\mathbb{P}(B_1 \mid A)$ en $\mathbb{P}(B_2 \mid A)$.

(3) [**R**] Zij X de continue stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Zij $Y = (X - 1)^2$.

(a) [**8**] Bereken de cumulatieve kansverdelingsfunctie F_Y en met behulp daarvan de kansdichtheidsfunctie f_Y.

(b) [**4**] Bereken $\mathbb{E}(Y)$.

(c) [**4**] Bereken $\text{var}(Y)$.

(4) [**I**] Zij X, Y het paar discrete stochasten met gezamenlijke kansmassafunctie

$$p_{X,Y}(k,\ell) = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2(k+\ell-1)^3}, & k,\ell \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [**4**] Zijn X, Y identiek verdeeld? Zijn X, Y onafhankelijk?

(b) [**4**] Bereken de kansmassafunctie p_Z van $Z = X + Y - 1$.

(c) [**8**] Geef een formule voor $\mathbb{P}(X > Y)$. Bereken deze kans vervolgens tot en met twee decimalen achter de komma nauwkeurig.

(5) [**R**] Het paar continue stochasten (R, S) heeft gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{R,S}(r,s) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 < r < s < \infty, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Zij $(U, V) = (e^R, e^S)$.

(a) [**8**] Bereken de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie $f_{U,V}$. *Hint:* Bepaal eerst de Jacobiaan van de inverse van de transformatie $T\colon (r,s) \to (u,v) = (e^r, e^s)$.

(b) [**2**] Bereken $\mathbb{E}(UV)$.

(6) [**T**] Zijn X, Y discrete stochasten met kansmassafunctie

$$p_X(k) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^k, & k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases} \qquad p_Y(\ell) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \ell = 1, 2, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Veronderstel dat X, Y onafhankelijk zijn.

(a) [**5**] Bereken de kansmassafunctie p_Z van $Z = XY$.

(b) [**5**] Bereken de kansgenererende functie G_Z. Wat is de convergentiestraal?

(7) [**T**] Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en

overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix},$$

waar $p \in [0,1]$ een parameter is.

(a) [**4**] Voor welke waarden van p is X irreducibel, respectievelijk, is X aperiodiek?

(b) [**4**] Bereken de invariante kansverdeling $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$.

(c) [**4**] Voor welke waarden van p is π reversibel?

(8) [**I**] Neem twee 3-zijdige dobbelstenen. Werp de twee dobbelstenen en noteer hun uitkomst. Kies daarna willekeurig één dobbelsteen, werp die dobbelsteen en noteer de uitkomst van beide dobbelstenen. Herhaal dit laatste kansexperiment.

(a) [**4**] Laat zien dat de aldus gegenereerde rij van paren van uitkomsten $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ een Markovketen vormen.

(b) [**4**] Wat is de toestandsruimte S van X? Wat is de overgangsmatrix P van X?

(c) [**8**] Zij Y_n de som van het paar uitkomsten na n worpen. Is $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ een Markovketen?

OPLOSSINGEN

(1) (a) De bovengrens volgt uit de ongelijkheid

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4),$$

de ondergrens uit de ongelijkheid

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq \max\big\{\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), \mathbb{P}(A_3), \mathbb{P}(A_4)\big\}.$$

(b) De bovengrens wordt bereikt door A_1, A_2, A_3, A_4 disjunct te kiezen, de ondergrens door te kiezen $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4$.

(2) (a) Bereken

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2) = \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{4}\,\tfrac{2}{3} = \tfrac{7}{12}.$$

(b) Bereken

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \tfrac{1}{7},$$

$$\mathbb{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}}{\frac{7}{12}} = \tfrac{6}{7}.$$

(3) (a) Bereken, voor $y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\big((X-1)^2 \leq y\big) = \mathbb{P}\big(-\sqrt{y}+1 \leq X \leq \sqrt{y}+1\big) \\ &= \int_{-\sqrt{y}+1}^{\sqrt{y}+1} f_X(x)\,dx = \int_{-\sqrt{y}+1}^{\sqrt{y}+1} (1 - \tfrac{1}{2}x)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (\tfrac{1}{2} - z)\,dz \\ &= \big[\tfrac{1}{2}z(1-z)\big]_{z=-\sqrt{y}}^{z=\sqrt{y}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{y}\,(1-\sqrt{y}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y}) = \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Het is verder evident dat $F_Y(y) = 0$ voor $y \leq 0$ en $F_Y(y) = 1$ voor $y \geq 1$. Na differentiëren volgt

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & y \in (0,1), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(b) Bereken

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \big[\tfrac{1}{3}y^{3/2}\big]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{3}.$$

(c) Idem geldt

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \tfrac{1}{2} y^{3/2}\,dy = \left[\tfrac{1}{5} y^{5/2}\right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{5},$$

en derhalve $\mathrm{var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$.

(4) (a) Vanwege symmetrie geldt $p_X = p_Y$, dus zijn X, Y identiek verdeeld. Omdat $p_{X,Y} \neq p_X p_Y$ zijn X, Y niet onafhankelijk.

(b) De som $Z = X + Y - 1$ heeft kansmassafunctie

$$\begin{aligned} p_Z(m) &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} 1_{\{k+\ell-1=m\}}\, p_{X,Y}(k,\ell) \\ &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^3} = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(c) Vanwege symmetrie geldt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > Y) &= \tfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(X \neq Y) = \tfrac{1}{2}\big[1 - \mathbb{P}(X = Y)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{(2k-1)^3}\right]. \end{aligned}$$

De gevraagde benadering krijgen we door de som na $k = 2$ af te breken. Omdat $\frac{1}{2}\,[1 - (6/\pi^2)(1^{-3} + 3^{-3})] = 0.1622...$ en $\frac{1}{2}\,(6/\pi^2)5^{-3} = 0.0024...$, is het antwoord $\mathbb{P}(X > Y) \approx 0.16$.

(5) (a) De transformatie T gegeven door $(u, v) = T(r, s) = (e^r, e^s)$ is een bijectie met inverse T^{-1} gegeven door $(r, s) = T^{-1}(u, v) = (\log u, \log v)$. De Jacobiaan van T^{-1} is de determinant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{vmatrix} = (uv)^{-1}.$$

Volgens de Jacobi formule geldt dus dat

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u, v) &= f_{(R,S)}\big(r(u, v), s = (u, v)\big)\,|J(u, v)| \\ &= \begin{cases} v^{-1}(uv)^{-1}, & 1 < u < v < \infty, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Er volgt

$$\mathbb{E}(UV) = \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv\, uv\, f_{(U,V)}(u,v) = \int_1^\infty du \int_u^\infty dv\, v^{-1} = \infty.$$

De integraal divergeert.

(6) (a) De kansmassafunctie van $Z = XY$ wordt gegeven door

$$p_Z(m) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\ell=1,2} 1_{\{k\ell=m\}} (\tfrac{1}{2})^k \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\big[(\tfrac{1}{2})^m + 1_{\{m \text{ even}\}}(\tfrac{1}{2})^{m/2}\big], \qquad m \in \mathbb{N},$$

(b) De kansgenererende functie van Z is

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} s^m p_Z(m) = \tfrac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{N}}(\tfrac{1}{2}s)^m + \tfrac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{N}}(\tfrac{1}{2}s^2)^m \\ &= \tfrac{1}{2}\frac{s}{2-s} + \tfrac{1}{2}\frac{s^2}{2-s^2}, \qquad s \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De convergentiestraal van G_Z is $\sqrt{2}$.

(7) (a) De toestandsruimte S kun je zien als de punten van een vierkant die kloksgewijs geordend zijn. De overgangskansen zijn zo dat sprongen met de klok mee kans p hebben en sprongen tegen de klok in kans $1-p$. Daardoor is X voor alle waarden van p irreducibel en voor geen enkele waarde van p aperiodiek (de periode is 2 voor $p \in (0,1)$ en 4 voor $p = 0, 1$).

(b) De invariante verdeling is een oplossing van de vergelijking $\pi = \pi P$ met $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$. Omdat X irreducibel is, is de oplossing uniek. Dit geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1-p)\pi_2 + p\pi_4, \\ \pi_2 &= (1-p)\pi_3 + p\pi_1, \\ \pi_3 &= (1-p)\pi_4 + p\pi_2, \\ \pi_4 &= (1-p)\pi_1 + p\pi_3, \end{aligned}$$

dat $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ als unieke oplossing heeft voor alle p.

(c) De Markovketen is reversibel dan en slechts dan wanneer $p = \frac{1}{2}$. Alleen dan geldt dat $\pi_1 p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ voor alle $1 \le i < j \le 4$.

(8) (a) De Markoveigenschap volgt uit het feit dat, voor elke $n \in \mathbb{N}_0$, de kansverdeling van X_{n+1} alleen maar afhangt van X_n. Immers, een van de twee dobbelstenen wordt niet geworpen en de uitkomst van de worp met de andere dobbelsteen is toevallig.

(b) De toestandsruimte is

$$S = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\},$$

de overgangsmatrix is

$$p_{(ij)(k,\ell)} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k = i, \ell \neq j \text{ of } k \neq i, \ell = j, \\ \frac{1}{3}, & k = i, \ell = j, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) Wanneer $X_n = (X_n^1, X_n^2)$, dan geldt $Y_n = X_n^1 + X_n^2$. Omdat informatie verloren gaat door de sommatie, is Y géén Markovketen. Bijvoorbeeld de toestand $Y_n = 4$ correspondeert met $X_n \in \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$. Er geldt echter

$$\mathbb{P}\big(X_{n+1} = x \mid X_n = (1,3)\big) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = (1,1), (1,2), (2,3), (3,3), \\ \frac{1}{3}, & x = (1,3), \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\big(X_{n+1} = x \mid X_n = (2,2)\big) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = (1,2), (3,2), (2,1), (2,3), \\ \frac{1}{3}, & x = (2,2), \end{cases}$$

en derhalve

$$\mathbb{P}\big(Y_{n+1} = y \mid X_n = (1,3)\big) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & y = 2, 3, 5, 6, \\ \frac{1}{3}, & x = 4, \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\big(Y_{n+1} = y \mid X_n = (2,2)\big) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 3, 4, 5, \\ 0, & x = 2, 6. \end{cases}$$

De kansverdeling van Y_{n+1} hangt dus niet alleen maar van de waarde van Y_n af.