HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Donderdag 2 juli 2015, 10:00–13:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{puntentotaal})/10$, waarbij het puntentotaal de som van de punten voor alle opgaven is.

(16 pt) **1.** Gegeven zijn de onderstaande deelruimten van $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek):

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)\} \qquad X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 6\}$$
$$Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \in \{0, 1\}\} \qquad Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in \mathbf{Q}\}$$

(a) Bepaal (zonder bewijs) van elke deelruimte of hij gesloten is en of hij compact is.

(b) Bepaal (zonder bewijs) van elke deelruimte de samenhangscomponenten.

(14 pt) **2.** Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij (Y, d_Y) een metrische deelruimte van X. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Als X rijcompact is en Y gesloten is in X, dan is Y rijcompact.

(b) Als X totaal begrensd is, dan is Y totaal begrensd.

(14 pt) **3.** (a) Bewijs dat het product van twee Hausdorffruimten weer een Hausdorffruimte is.

(b) Zijn X en Y topologische ruimten zodanig dat X een Hausdorffruimte is, en zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding. Bewijs dat Y een Hausdorffruimte is.

(14 pt) **4.** Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Gegeven een deelruimte Z van X schrijven we $\bar{Z}$ voor de afsluiting van Z in X, en Z° voor het inwendige van Z in X. Een deelruimte Y van X heet *nergens dicht* (in X) als $(\bar{Y})^\circ$ leeg is.

(a) Bewijs dat Y nergens dicht is in X dan en slechts dan als $X \setminus \bar{Y}$ dicht is in X.

(b) Stel dat $Y_1, Y_2 \subseteq X$ nergens dicht zijn. Bewijs dat $Y_1 \cup Y_2 \subseteq X$ nergens dicht is.

Hint: Het volgende feit mag als bekend worden aangenomen: als U en V open deelverzamelingen van X zijn die dicht zijn in X, dan is ook $U \cap V$ dicht in X.

(16 pt) **5.** (a) Gegeven zijn twee topologische ruimten X en Y en vier continue afbeeldingen $f, f'\colon X \to X$ en $g, g'\colon Y \to Y$ zodanig dat f homotoop is met f', en g met g'. We definiëren twee afbeeldingen $h, h'\colon X \times Y \longrightarrow X \times Y$ door $h(x, y) = (f(x), g(y))$ en $h'(x, y) = (f'(x), g'(y))$. Bewijs dat h en h' continu zijn en homotoop met elkaar zijn.

(b) Zijn X_1, X_2, Y_1 en Y_2 topologische ruimten zodanig dat X_1 homotopie-equivalent is met X_2, en Y_1 met Y_2. Bewijs dat $X_1 \times Y_1$ homotopie-equivalent is met $X_2 \times Y_2$.

(16 pt) **6.** Bepaal (met onderbouwing) van elk van de volgende topologische ruimten de fundamentaalgroep.

(a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \{4, 9\}\}$ met basispunt $(0, 2)$;

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\} \setminus \{(-1, -1, -1)\}$ met basispunt $(1, 1, 1)$.

Succes!