Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Hertentamen Algebra 2

12 maart 2015, 14:00–17:00

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen. Opgaven uit het dictaat mag je niet *zonder bewijs gebruiken.*

1. Bepaal een voortbrenger van het ideaal $(6+9i, 3-6i)$ in $\mathbb{Z}[i]$. Is dit ideaal een priemideaal?

2. Ontbind het polynoom $X^3 - 5X^2 + X - 3$ in elk van de ringen $\mathbb{F}_2[X]$, $\mathbb{F}_3[X]$, $\mathbb{F}_5[X]$ en $\mathbb{Q}[X]$ in irreducibele factoren.

3. Stel dat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de drie complexe nulpunten van het polynoom

$$X^3 + X - 5$$

zijn. Bereken $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ en $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$. Hoeveel van de getallen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zijn reëel?

4. Beschouw de ring $\mathbb{Z}[[X]]$ van machtreeksen over $\mathbb{Z}$.

(a) Laat zien dat $1 - X \in \mathbb{Z}[[X]]$ een eenheid is.

(b) Laat zien dat $3 + X^2 \in \mathbb{Z}[[X]]$ geen eenheid is.

(c) Is $\mathbb{Z}[[X]]$ een hoofdideaaldomein?

5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

(a) een ring met precies drie idealen;

(b) een algebraïsche verzameling in $\mathbb{C}^2$ die geen variëteit is;

(c) een torsiemoduul over $\mathbb{Z}$ waarvan de annihilator nul is.