Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Hertentamen Algebra 2

16 maart 2017, 14:00–17:00

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen. Opgaven uit het dictaat mag je niet *zonder bewijs gebruiken.*

1. (a) Bereken de grootste gemene deler van $14+18i$ en $14+22i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Definieer een homomorfisme $\phi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[i]$ door $\phi(f) = f(i)$. Laat zien dat de kern van f gelijk is aan het ideaal (X^2+1), en concludeer dat de ringen $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$ en $\mathbb{Z}[i]$ isomorf zijn.

2. Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{C}$ gedefinieerd zijn door

$$X^5 - X + 3 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)(X-\alpha_5).$$

(a) Bereken $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2$ en $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3+\alpha_5^3$.

(b) Laat zien dat $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ niet in $\mathbb{Q}$ liggen.

3. Zij R de ring $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^3)$.

(a) Laat zien dat er een injectief homomorfisme $f\colon R \to \mathbb{C}[Z]$ is dat R identificeert met de deelring

$$\Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i Z^i \in \mathbb{C}[Z] \mid a_1 = 0 \Big\}.$$

(b) Laat zien dat R geen hoofdideaaldomain is.

4. (a) Ontbind de polynomen

$$X^3+X+1, \quad X^3+3X^2+3X+2 \quad \text{en} \quad X^3+2X^2+2X+1.$$

in irreducibele factoren in $\mathbb{F}_5[X]$.

(b) Zijn de ringen

$$\mathbb{F}_5[X]/(X^3+3X^2+3X+2) \quad \text{en} \quad \mathbb{F}_5[X]/(X^3+2X^2+2X+1)$$

isomorf?

5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

(a) twee niet-isomorfe modulen over $\mathbb{Q}[X]$ met dezelfde exponent;

(b) twee verschillende priemidealen I, J in $\mathbb{R}[X,Y]$ met

$$Z(I) = Z(J) = \{(0,0)\};$$

(c) een ontbindingsring die geen hoofdideaaldomein is.