Tentamen Inleiding Kansrekening

9 juni 2016, 10:00–13:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 8 vragen, elk met 2 onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vetgedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is niet voldoende. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

---

(1) [**R**]

(a) [**7**] Laat zien, met behulp van een Venn-diagram, dat de kans dat *precies twee* van de gebeurtenissen A, B en C optreden gelijk is aan

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A^c)+\mathbb{P}(B^c)+\mathbb{P}(C^c)\\&\quad-2\mathbb{P}(A^c\cap B^c)-2\mathbb{P}(A^c\cap C^c)-2\mathbb{P}(B^c\cap C^c)+3\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C^c).\end{aligned}$$

(b) [**8**] Laat zien dat als $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$, dan is A onafhankelijk van elke gebeurtenis B.

(2) [**R**] Op zaterdag en zondag doe ik boodschappen. Op zaterdag ga ik met kans $\frac{1}{3}$ naar Jumbo (J) en met kans $\frac{2}{3}$ naar Albert Heijn (AH). Gegeven dat ik op zaterdag naar J ga, kies ik zondag voor J met kans $\frac{1}{5}$ en voor AH met kans $\frac{4}{5}$. Gegeven echter dat ik zaterdag naar AH ga, kies ik op zondag voor AH met kans $\frac{1}{4}$ en voor J met kans $\frac{3}{4}$.

(a) [**7**] Bereken de kans dat ik op zondag naar J ga.

(b) [**8**] Bereken de kans dat ik op zaterdag naar AH ga, geven dat ik op zondag naar J ga.

(3) **[T]**

(a) **[5]** Zij X de discrete stochast met kansmassafunctie

$$p_X(k) = \begin{cases} C(\frac{1}{2})^k, & k = 11, 12, \ldots, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de waarde van C. Wat is het domein van de moment-genererende functie van X?

(b) **[5]** Zij X de continue stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = C|x| \exp(-x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bereken de waarde van C. Wat is het domein van de moment-genererende functie van X?

(4) **[T]**

(a) **[5]** Zij X de continue stochast met cumulatieve kansverdelingsfunctie $F_X(x) = (1 - x^{-1})\, 1_{[1,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bereken de kansdichtheidsfunctie van de stochast $Y = 1/X$. Hoe heet de kansverdeling van Y?

(b) **[5]** Zij X, Y het paar discrete stochasten met gezamenlijke kansmassafunctie $p_{X,Y}(k,l) = 6\pi^{-2}(k + l + 1)^{-3}\, 1_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}(k,l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Bereken de kansmassafunctie van $Z = X + Y$.

(5) **[T]** Zij (X, Y) het paar stochasten met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = 3\left[\max\{x,y\} - \min\{x,y\}\right] 1_{[0,1]\times[0,1]}(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) **[8]** Bereken de kansdichtheidsfunctie van X gegeven $Y = y$.

(b) **[7]** Bereken $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.

(6) [**T**] De gemeente Leiden voert een onderzoek uit naar de bierconsumptie van jongeren op 3 oktober. Het doel van het onderzoek is om tot een schatting te komen van het gemiddeld aantal glazen dat jongeren tussen 18 en 21 jaar op die feestdag drinken. Daartoe wordt een vrijwillige enquête gehouden onder 900 jongeren. De uitkomsten van die enquête zijn $N_1, \ldots, N_{900}$. Volgens de wet van de grote aantallen geldt dat $\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} N_i \approx \mu$, waar μ het gezochte maar onbekende gemiddelde is.

(a) [**8**] Gebruik de centrale limietstelling om een schatting te geven van de kans

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} N_i - \mu\right| > 0.1\right)$$

wanneer gegeven is dat $N_1, \ldots, N_{900}$ onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met standaarddeviatie 1 glas. Gebruik dat $\Phi(3) \approx 0.99865$, waar Φ de cumulatieve kansverdelingsfunctie van de standaard normale verdeling is.

(b) [**7**] De uitkomst van de enquête is dat er 4800 glazen bier zijn gedronken. Geef aan hoe we hiermee het gemiddelde μ kunnen schatten, en wat de kans is dat deze schatting correct is.

(7) [**R**]

(a) [**5**] Geef de definitie van een Markovketen $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ op een aftelbare toestandsruimte S.

(b) [**5**] Geef een formule voor de kans $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ dat een tijdshomogene Markovketen startend in $i \in S$ na n stappen in $j \in S$ is, gebruikmakend van de overgangsmatrix $P = (P_{ij})_{i,j\in S}$.

(8) [**I**] Zij $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ een irreducibele en aperiodieke Markovketen op een *eindige* toestandsruimte S.

(a) [**5**] Formuleer het bewijs van de convergentiestelling van X. Geef aan waar in het bewijs je gebruikt dat X Markov, irreducibel en aperiodiek is. *Hint:* Gebruik een koppeling van twee copieën X^1, X^2 van X, de eerste startend in een willekeurige toestand $x_* \in S$, de tweede startend in de stationaire verdeling π op S. Plak X^1 en X^2 aan elkaar nadat ze elkaar ontmoeten, d.w.z. op tijdstip $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0\colon\ X^1_n = X^2_n\}$.

(b) [**5**] Is de stelling ook waar op een aftelbaar oneindige toestandsruimte?

(1) (a) De gevraagde kans is gelijk aan de kans dat *precies een* van de gebeurtenissen A^c, B^c en C^c optreden. Deze kans volgt uit een Venn-diagram voor de gebeurtenissen A^c, B^c en C^c, tezamen met het principe van inclusie-exclusie: tel alleen die delen van het Venn-diagram die in precies een van de gebeurtenissen A^c, B^c en C^c liggen.

(b) Als $\mathbb{P}(A) = 1$, dan geldt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B),$$

waar we gebruiken dat $0 \le \mathbb{P}(A^c \cap B) \le \mathbb{P}(A^c) = 0$. Als $\mathbb{P}(A) = 0$, dan geldt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B),$$

waar we gebruiken dat $0 \le \mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A) = 0$.

(2) Zijn X_1, X_2 de supermarkten die ik op zaterdag en zondag bezoek. Dan geldt dus

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = J) = \tfrac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_1 = AH) = \tfrac{2}{3},\\
&\mathbb{P}(X_2 = J \mid X_1 = J) = \tfrac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(X_2 = AH \mid X_1 = J) = \tfrac{4}{5},\\
&\mathbb{P}(X_2 = AH \mid X_1 = AH) = \tfrac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X_2 = J \mid X_1 = AH) = \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(a) Bereken

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = J) &= \mathbb{P}(X_2 = J \mid X_1 = J)\,\mathbb{P}(X_1 = J)\\
&\quad + \mathbb{P}(X_2 = J \mid X_1 = AH)\,\mathbb{P}(X_1 = AH)\\
&= \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{17}{30}.
\end{aligned}$$

(b) Bereken, met behulp van de regel van Bayes,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = AH \mid X_2 = J) = \mathbb{P}(X_1 = AH, X_2 = J)\,\frac{1}{\mathbb{P}(X_2 = J)}\\
&= \mathbb{P}(X_2 = J \mid X_1 = AH)\,\frac{\mathbb{P}(X_1 = AH)}{\mathbb{P}(X_2 = J)}\\
&= \tfrac{3}{4} \times \tfrac{\frac{2}{3}}{\frac{17}{30}} = \tfrac{15}{17}.
\end{aligned}$$

(3) (a) Bereken

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_X(k) = \sum_{k=11}^{\infty} C(\tfrac{1}{2})^k = C(\tfrac{1}{2})^{10}.$$

Derhalve geldt $C = 2^{10}$. De moment-genererende functie is

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=11}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{k-10}\, e^{tk} = e^{10t}\frac{\frac{1}{2}e^t}{1-\frac{1}{2}e^t}$$

en is eindig dan en slechts dan wanneer $t < \log 2$.

(b) Bereken

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} C|x|\, e^{-x^2}\, dx = C\int_0^{\infty} 2x\, e^{-x^2}\, dx = C\int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = C,$$

waarbij we de transformatie van variable $y = x^2$ uitvoeren. Derhalve geldt $C = 1$. De moment-genererende functie is

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} |x|\, e^{-x^2}\, e^{tx}\, dx$$

en is eindig voor alle $t \in \mathbb{R}$. De integraal kan worden uitgerekend, maar dat is niet nodig.

(4) (a) Omdat $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$ geldt $\mathbb{P}(0 < Y \leq 1) = 1$. Voor de cumulatieve kansverdelingsfunctie van Y geldt derhalve $F_Y(y) = 0$ voor $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$ voor $y > 1$ en

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \geq 1/y) = 1 - \mathbb{P}(X < 1/y) \\ &= 1 - F_X(1/y) = 1 - (1-y) = y, \quad 0 < y \leq 1. \end{aligned}$$

De stochast Y is dus uniform verdeeld op $[0,1]$.

(b) Het is evident dat $p_Z(m) = 0$ voor $m \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0$. Voor $m \in \mathbb{N}_0$ bereken

$$p_Z(m) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}_0\\ k+l=m}} p_{X,Y}(k,l) \;\; = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}_0\\ k+l=m}} 6\pi^{-2}(m+1)^{-3} = 6\pi^{-2}(m+1)^{-2}.$$

Merk op dat $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} p_Z(m) = 1$ omdat $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-2} = \frac{1}{6}\pi^2$.

(5) (a) De (marginale) kansdichtheidsfunctie van Y is $f_Y(y) = 0$ voor $y \notin [0,1]$ en

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 3(y-x)\,dx + \int_y^1 3(x-y)\,dx \\ &= \int_0^y 3z\,dz + \int_0^{1-y} 3z\,dz = \tfrac{3}{2}[y^2 + (1-y)^2] \end{aligned}$$

voor $y \in [0,1]$. Bereken hiermee de kansdichtheidsfunctie van X gegeven $Y = y$ als volgt: $f_{X|Y}(x|y) = 0$ voor $y \notin [0,1]$ en

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{[y^2 + (1-y)^2]} \times \begin{cases} y-x, & x \in [0,y], \\ x-y, & x \in [y,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

voor $y \in [0,1]$.

(b) Bereken

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid Y = y) &= \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X|Y}(x|y) \\ &= \frac{2}{[y^2 + (1-y)^2]} \left[\int_0^y x(y-x)\,dx + \int_y^1 x(x-y)\,dx \right] \\ &= \frac{2}{[y^2 + (1-y)^2]} \left[\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

(6) (a) Definieer

$$Z_{900} = \frac{\sum_{i=1}^{900} N_i - 900\mu}{30}.$$

Volgens de centrale limietstelling is Z_{900} bij benadering standaard normaal verdeeld. Ervan uitgaande deze benadering goed genoeg is (zonder extra informatie kunnen we dit niet nader kwantificeren), schatten we

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left| \tfrac{1}{900} \sum_{i=1}^{900} N_i - \mu \right| > 0.1 \right) = \mathbb{P}(|Z_n| > 3) \approx \mathbb{P}(|Z| > 3) \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus[-3,3]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} = 2[1 - \Phi(3)] \approx 0.0027. \end{aligned}$$

(b) De enquête levert $\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} N_i = \frac{4800}{900} = 5\frac{1}{3}$. De kans is derhalve ≈ 0.0027 dat $|5\frac{1}{3} - \mu| > 0.1$. M.a.w. $\mu \in [5\frac{7}{30}, 5\frac{13}{30}]$ met kans ≈ 0.9973.

(7) (a) X is Markov wanneer voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ en $i_0, \ldots, i_{n+1} \in S$ geldt

$$\mathbb{P}(X_n = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \ldots X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n),$$

m.a.w. de conditionele kansverdeling van X_{n+1} gegeven $X_n, \ldots, X_0$ (het verleden) hangt alleen af van X_n (het heden).

(b) Er geldt

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = (P^n)_{ij},$$

waarbij P^n de n-de macht van P is.

(8) (a) Zij $\mathbb{P}^{1,2}$ de gezamenlijk kansverdeling van het paar (X^1, X^2). Dan geldt

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}_{x_*}(X_n = x) - \pi_n(x)| &= |\mathbb{P}^{12}(X_n^1 = x) - \mathbb{P}^{12}(X_n^2 = x)| \\ &= |\mathbb{P}^{12}(X_n^1 = x, \tau > n) - \mathbb{P}^{12}(X_n^2 = x, \tau > n)| \\ &\leq \mathbb{P}^{12}(\tau > n).\end{aligned}$$

De eerste gelijkheid gebruikt dat, ondanks het feit dat we X^1 en X^2 aan elkaar plakken vanaf tijdstip τ, elk apart een copie van X is. Dit geldt vanwege de (sterke) Markoveigenschap van X. De tweede gelijkheid gebruikt dat $\mathbb{P}^{12}(X_n^1 = X_n^2 \; \forall\, n \geq \tau) = 1$. Het rechterlid van bovenstaande formule is onafhankelijk van x. Het volstaat derhalve om aan te tonen dat $\mathbb{P}^{12}(\tau < \infty) = 1$ voor alle $x_* \in S$. Omdat S *eindig* is en X is irreducibel aperiodiek, bestaan er $\delta > 0$ en $m \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\inf_{x \in S} \mathbb{P}_x(X_n = 0) > \delta \quad \forall\, n \geq m.$$

Dit impliceert dat, ongeacht waar X^1 en X^2 zich bevinden op een gegeven tijdstip, ze een kans minstens δ hebben om elkaar te ontmoeten binnen m stappen. I.h.b. geldt dus $\mathbb{P}^{12}(\tau \leq (k+1)m \mid \tau \geq km) > \delta$, $k \in \mathbb{N}_0$, waaruit weer volgt dat $\mathbb{P}^{12}(\tau \geq km) \leq (1-\delta)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Laat nu $k \to \infty$ om te concluderen dat inderdaad $\mathbb{P}^{12}(\tau < \infty) = 1$ voor alle $x_* \in S$.

(b) Nee. De stelling geldt alleen dan als X positief recurrent is, d.w.z. een invariante kansverdeling heeft.