Tentamen Inleiding Kansrekening

16 juni 2017, 14:00–17:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 8 vragen, elk met twee of drie onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vet gedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op *elk* blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is *niet* voldoende. Elke berekening dient van een *toelichting* te worden voorzien.

---

(1) [**R**] Gegeven zijn drie gebeurtenissen A, B, C met $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{5}{6}$.

(a) [**5**] Laat zien dat
$$\tfrac{23}{60} \le \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \le \tfrac{3}{4}.$$
Hint: Kijk ook naar de gebeurtenissen A^c, B^c, C^c.

(b) [**5**] Geef voorbeelden, aan de hand van een Venn-diagram, waaruit blijkt dat de ondergrens en de bovengrens bereikt kunnen worden.

(2) [**R**] Het tripel $\mathbb{R}$-waardige continue stochasten (X, Y, Z) heeft gezamenlijke kansdichtheidsfunctie
$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} C, & 0 \le x < y < z \le 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [**4**] Bereken C.

(b) [**6**] Bereken $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Z)$.

(c) [**4**] Bereken $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Hint: Integreer steeds eerst over x, daarna over y en vervolgens over z.

(3) [**R**] Zij X de $\mathbb{N}_0$-waardige discrete stochast met kansmassafunctie
$$p_X(k) = \begin{cases} C_N(\frac{2}{3})^k, & 0 \le k < N, \\ C_N(\frac{1}{3})^k, & k \ge N, \end{cases}$$

waarbij $N \in \mathbb{N}_0$ een parameter is.

(a) **[3]** Bereken C_N.

(b) **[5]** Bepaal de convergentiestraal van de kansgenererende functie $s \mapsto G_X(s)$ en leidt een formule af voor $G_X(s)$ binnen de convergentiecirkel.

(c) **[5]** Bereken $\mathbb{E}(X)$. *Hint:* Gebruik de formule in onderdeel (b). Indien de afleiding daarvan niet gelukt is, geef dan een direkte berekening.

(4) **[T]** Het paar $\mathbb{R}$-waardige continue stochasten (X, Y) heeft gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{(1-x)(1-y)}}, & 0 \leq x < y \leq 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) **[4]** Bereken $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2})$.

(b) **[6]** Bereken $\mathbb{E}(Y \mid X \geq \frac{1}{2})$.

(5) **[I]** Gegeven zijn twee paren van stochasten (U_1, U_2) en (V_1, V_2), die elk paarsgewijs onafhankelijk zijn.

(a) **[5]** Laat zien dat

$$\begin{aligned} &|\mathrm{cov}(U_1 + U_2, V_1 + V_2)| \\ &\qquad \leq \sqrt{[\mathrm{var}(U_1) + \mathrm{var}(U_2)] \times [\mathrm{var}(V_1) + \mathrm{var}(V_2)]}. \end{aligned}$$

(b) **[5]** Laat zien dat, wanneer U_1, U_2, V_1, V_2 elk gemiddelde nul hebben,

$$\begin{aligned} &|\mathrm{cov}(U_1 U_2, V_1 V_2)| \\ &\qquad \leq \sqrt{\mathrm{var}(U_1) \times \mathrm{var}(U_2) \times \mathrm{var}(v_1) \times \mathrm{var}(v_2)}. \end{aligned}$$

Hint: Gebruik de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

(6) **[T]** Zij $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een i.i.d. rijtje stochasten, elk standaard normaal verdeeld, en zij N een $\mathbb{N}$-waardige discrete stochast met kansmassafunctie $k \mapsto p_N(k)$.

(a) **[5]** Druk de momentgenererende functie $M_{S_N}(t)$ van de som $S_N = \sum_{i=1}^N W_i$ uit in termen van de kansgenererende functie $s \mapsto G_N(s)$ van N.

(b) **[8]** Stel dat N Binomiaal verdeeld is met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{2}$. Bereken $\mathbb{E}(S_N)$ en $\mathrm{var}(S_N)$. *Hint:* Gebruik de formule in onderdeel (a). Indien de afleiding daarvan niet gelukt is, geef dan een direkte berekening.

(7) **[T]** Zij $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **[5]** Is X irreducibel? Is X aperiodiek?

(b) **[5]** Bereken de invariante kansverdeling $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

(c) **[5]** Is π reversibel?

(8) **[I]** Drie kaarten genummerd $1, 2, 3$ worden op tafel gelegd, in de volgorde 123. Achtereenvolgens wordt steeds één willekeurig gekozen kaart opgepakt en weer teruggelegd tússen de twee andere kaarten.

(a) **[5]** Laat zien dat de aldus gegenereerde 3-rijtjes een Markovketen $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vormen.

(b) **[5]** Wat is de toestandsruimte S van X? Wat is de overgangsmatrix P van X?

(c) **[5]** Hoe lang duurt het gemiddeld voor het rijtje 123 weer terugkeert?

(1) (a) De ondergrens volgt uit de ongelijkheid

$$\mathbb{P}(A^c \cup B^c \cup C^c) \leq \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(C^c),$$

de bovengrens volgt uit de ongelijkheid

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)\}.$$

(b) De ondergrens wordt bereikt door A^c, B^c, C^c disjunct te kiezen, de bovengrens door $A \subset B \subset C$ te kiezen.

(2) (a) Bereken

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dz \, f_{X,Y,Z}(x,y,z) \\ &= C \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y dx = C \int_0^1 dz \int_0^z dy \, y \\ &= C \int_0^1 dz \, \tfrac{1}{2} z^2 = \tfrac{1}{6} C. \end{aligned}$$

Derhalve geldt $C = 6$.

(b) Bereken

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 6 \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y dx \, x = 6 \int_0^1 dz \int_0^z dy \, \tfrac{1}{2} y^2 \\ &= 6 \int_0^1 dz \, \tfrac{1}{6} z^3 = 6 \, \tfrac{1}{24} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Op analoge wijze vinden we $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{E}(Z) = \frac{3}{4}$.

(c) Bereken

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 6 \int_0^1 dz \int_0^z dy \, y \int_0^y dx \, x = 6 \int_0^1 dz \int_0^z dy \, \tfrac{1}{2} y^3 \\ &= 6 \int_0^1 dz \, \tfrac{1}{8} z^4 = 6 \tfrac{1}{40} = \tfrac{3}{20}. \end{aligned}$$

Derhalve volgt dat $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{20} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$.

(3) (a) Bereken

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = C_N \sum_{k=0}^{N-1} (\tfrac{2}{3})^k + C_N \sum_{k=N}^{\infty} (\tfrac{1}{3})^k = C_N \left[\frac{1-(\frac{2}{3})^N}{1-\frac{2}{3}} + \frac{(\frac{1}{3})^N}{1-\frac{1}{3}} \right].$$

Derhalve geldt $1/C_N = 3[1-(\frac{2}{3})^N] + \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^N$.

(b) De convergentiestraal van de kansgenererende functie

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) s^k$$

is gelijk aan $s = 3$. Omdat N eindig is wordt de convergentiestraal bepaald door de waarden van $p_X(k)$ voor $k \geq N$. Een berekening analoog aan hierboven geeft

$$G_X(s) = C_N \left[\frac{1-(\frac{2}{3}s)^N}{1-\frac{2}{3}s} + \frac{(\frac{1}{3}s)^N}{1-\frac{1}{3}s} \right], \qquad |s| < 3.$$

(c) Bereken

$$G_X'(s) = C_N \left[\frac{-\frac{2}{3}N(\frac{2}{3}s)^{N-1}}{1-\frac{2}{3}s} + \frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{2}{3}s)^N]}{(1-\frac{2}{3}s)^2} + \frac{\frac{1}{3}N(\frac{1}{3}s)^{N-1}}{1-\frac{1}{3}s} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}s)^N}{(1-\frac{1}{3}s)^2} \right].$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= G_X'(1) \\ &= C_N \left[-2N(\tfrac{2}{3})^{N-1} + 6[1-(\tfrac{2}{3})^N] + \tfrac{1}{2}N(\tfrac{1}{3})^{N-1} + \tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{3})^N \right]. \end{aligned}$$

(4) (a) Bereken

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq \tfrac{1}{2}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x}^{1} dy \, \frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1-y)}} \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \, \frac{1}{\sqrt{1-x}} [-\sqrt{1-y}]_{y=x}^{y=1} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Merk op dat $\mathbb{E}(Y \mid X \geq \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{E}(1-Y \mid X \geq \frac{1}{2})$. Bereken vervolgens

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((1-Y)\, 1_{\{X \geq \frac{1}{2}\}} \right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x}^{1} dy \, \frac{\sqrt{1-y}}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \tfrac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x}^{1} dy \, [-(1-y)^{3/2}]_{y=x}^{y=1} = \tfrac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \, (1-x) \\ &= \tfrac{1}{6}[-(1-x)^2]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} = \tfrac{1}{24}. \end{aligned}$$

Derhalve geldt $\mathbb{E}(Y \mid X \geq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

(5) (a) De Cauchy-Schwarz ongelijkheid geeft

$$\mathrm{Cov}(U_1 + U_2, V_1 + V_2)^2 \leq \mathrm{Var}(U_1 + U_2) \times \mathrm{Var}(V_1 + V_2).$$

Vanwege de onafhankelijkheid binnen elk paar is de variantie van de som gelijk aan de som van de varianties.

(b) De Cauchy-Schwarz ongelijkheid geeft

$$\mathrm{Cov}(U_1U_2, V_1V_2)^2 \leq \mathrm{Var}(U_1U_2) \times \mathrm{Var}(V_1V_2).$$

Vanwege de onafhankelijkheid binnen elk paar, plus het feit dat alle gemiddelden nul zijn, is de variantie van het product gelijk aan het product van de varianties.

(6) (a) Schrijf

$$\begin{aligned} M_{S_N}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, \mathbb{E}\big(e^{tS_N} \mid N = k\big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, \mathbb{E}(e^{tS_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, \big[\mathbb{E}(e^{tW_1})\big]^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, [e^{t^2/2}]^k = G_N(e^{t^2/2}). \end{aligned}$$

(b) Wanneer N Binomiaal verdeeld is met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{2}$, dan geldt $G_N(s) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s)^{10}$. Derhalve volgt dat

$$M_{S_N}(t) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^{10}.$$

Twee keer differentiëren naar t geeft

$$\begin{aligned} M'_{S_N}(t) &= 10(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^9\, \tfrac{1}{2}te^{t^2/2}, \\ M''_{S_N}(t) &= 90(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^8\, (\tfrac{1}{2}te^{t^2/2})^2 + 10(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^9\, [\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2}t)^2]\, e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_N) &= M'_{S_N}(0) = 0, \\ \mathrm{var}(S_N) &= M''_{S_N}(0) + M'_{S_N}(0) = 5. \end{aligned}$$

Dit antwoord kan ook worden afgeleid uit de observaties

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} W_i\right) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(W_1) = 5 \times 0 = 0,$$
$$\operatorname{var}(S_N) = \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{N} W_i\right) = \mathbb{E}(N)\operatorname{var}(W_1) = 5 \times 1 = 5.$$

(7) (a) X is irreducibel omdat met alle toestanden met een strikt positieve kans vanuit elkaar bereikbaar zijn. X is aperiodiek omdat terugkeertijden veelvouden van 2 en 3 zijn.

(b) De invariante kansverdeling is een oplossing van de vergelijking $\pi = \pi P$. Dit geeft de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{3}{4}\pi_3, \\ \pi_2 &= \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{4}\pi_3, \\ \pi_3 &= \tfrac{3}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2. \end{aligned}$$

Hieruit berekenen we dat $\pi_1 = 2\pi_2 = \pi_3$. Omdat $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, volgt dat $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

(c) Omdat $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ voor alle $1 \leq i < j \leq 3$, volgt dat π reversibel is. Bijvoorbeeld, $\pi_1 p_{12} = \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ en $\pi_2 p_{21} = \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

(8) (a) Omdat kaarten onafhankelijk worden getrokken, is de uitkomst van elk volgend rijtje slechts afhankelijk van het vorige rijtje.

(b) De toestandsruimte is $S = \{123, 312, 231, 132, 213, 321\}$. De overgangsmatrix is

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(c) De invariante kansverdeling is uniform: $\pi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. De gemiddelde terugkeertijd van elke toestand is derhalve gelijk aan 6.