TENTAMEN TOPOLOGIE

Vrijdag 12 juni 2015, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $\min\{10, 1 + (\text{aantal punten})/10\}$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **zes** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(16 pt) **1.** Gegeven zijn de onderstaande deelruimten van $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek):

$$W = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0 \text{ of } x \in \mathbf{Q}\} \qquad X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$
$$Y = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^2 - 1\} \qquad Z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 2 \text{ en } |y| \leq 2\}$$

Geef (zonder bewijs) van elke deelruimte aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: volledig, compact, wegsamenhangend, dicht in $\mathbf{R}^2$.

(12 pt) **2.** Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij (Y, d_Y) een metrische deelruimte van X. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Als X volledig is en Y gesloten is in X, dan is Y volledig.

(b) Als X compact is, dan is Y compact.

(12 pt) **3.** (a) Bewijs de volgende uitspraak of geef een tegenvoorbeeld: elke topologische deelruimte van een Hausdorffruimte is zelf ook een Hausdorffruimte.

(b) Zij $X = \{p, q, r\}$ een verzameling met drie elementen. Bepaal (met onderbouwing) een topologie $\mathcal{T}$ op X zodanig dat $(X, \mathcal{T})$ geen Hausdorffruimte is.

(16 pt) **4.** Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Gegeven een deelruimte Z van X schrijven we $\bar{Z}$ voor de afsluiting van Z in X, en Z° voor het inwendige van Z in X. Een deelruimte Y van X heet *nergens dicht* (in X) als $(\bar{Y})^\circ$ leeg is.

(a) Stel dat Y nergens dicht is in X. Bewijs dat $X \setminus Y$ dicht is in X.

(b) Stel dat $Y_1, Y_2 \subseteq X$ nergens dicht zijn. Bewijs dat $Y_1 \cup Y_2 \subseteq X$ nergens dicht is.

(16 pt) **5.** Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten. De *grafiek* van f is de topologische deelruimte Γ_f van de productruimte $X \times Y$ gedefinieerd door

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

(a) Bewijs dat de topologische ruimten Γ_f en X homeomorf zijn.

(b) Stel dat Y een Hausdorffruimte is. Bewijs dat Γ_f gesloten is in $X \times Y$.

(16 pt) **6.** (a) Definieer het begrip *samentrekbaarheid* van een topologische ruimte.

(b) Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Stel dat *ten minste één* van de ruimten X en Y samentrekbaar is. Bewijs dat f homotoop is met een constante afbeelding.

(16 pt) **7.** Bepaal (met onderbouwing) van elk van de volgende topologische ruimten de fundamentaalgroep.

(a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 3\}$ met basispunt $(\sqrt{2}, 0)$;

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ met basispunt $(0,0,0)$.

Succes!