Tentamen Wiskundige Structuren 2015-2016

Vrijdag 15 januari 2015, 14u00–17u00

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt, tenzij expliciet in de vraag vermeld staat dat dit niet hoeft. Dit tentamen bestaat uit **7** *opgaven.*

Het tentamen is in te zien tussen 1 en 5 februari 2016. Gelieve hiervoor contact op te nemen met de docent.

Vraag 1

Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{als } x \leq 0, \\ h(x), & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

(a)[5p] Geef een functie $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zodat f injectief is, maar niet surjectief.
(b)[5p] Geef een functie $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zodat f monotoon is, maar niet strikt stijgend.

Vraag 2 [12p]

Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geldt dat $2^{2n} - 1$ deelbaar is door 3.

Vraag 3

Definieer de relatie $\sim$ op de verzameling $\{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq 20\}$ door $a \sim b$ dan en slechts dan als $a - b$ deelbaar is door 4. $\sim$ is een equivalentierelatie. Dit mag je aannemen en hoef je niet te bewijzen.
(a)[4p] Geef alle equivalentieklassen van $\sim$. Je hoeft niets te bewijzen.
(b)[3p] Geef de definitie van quotiënt voor een equivalentierelatie.
(c)[4p] Geef een quotiëntafbeelding voor de equivalentierelatie $\sim$ die hierboven gegeven is. Je hoeft niets te bewijzen.

Vraag 4

Laat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een begrensde reële rij zijn. Definieer voor iedere $k \in \mathbb{N}$ de verzameling $A_k = \{x_n : n \geq k\}$.
(a)[4p] Bewijs dat $\inf A_k$ bestaat voor iedere $k \in \mathbb{N}$.

Laat $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de reële rij zijn gegeven door $y_n = \inf A_n$.
(b)[3p] Formuleer de Monotone Convergentiestelling.
(c)[6p] Bewijs dat de rij $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent is.

De limiet van de rij $(y_n)_{n \geq 1}$ heet de *limes inferior* (liminf) van de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\liminf_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \inf \{x_k : k \geq n\}.$$

Laat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de reële rij zijn gegeven door $a_n = 1 - 3(-1)^n$.
(d)[7p] Geef $\liminf_{n \to \infty} a_n$.

z.o.z.

Vraag 5

Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reëele rij zijn gegeven door

$$a_n = \begin{cases} 1-\frac{1}{n}, & \text{als } n = 0 \pmod 3, \\ 0, & \text{als } n = 1 \pmod 3, \\ 3n, & \text{als } n = 2 \pmod 3. \end{cases}$$

(a) [6p] Geef een deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die niet begrensd is.
(b) [6p] Geef een deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die convergent is met limiet 1.

Vraag 6

(a)[3p] Formuleer de Tussenwaardestelling.
(b)[7p] Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Het bereik van f wordt genoteerd met $f[\mathbb{R}]$. Stel dat $f[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Bewijs dat f een constante functie is, d.w.z. bewijs dat er een $c \in \mathbb{R}$ is zodat $f(x) = c$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 7

Laat $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ een uniform continue functie zijn.
(a)[5p] Bewijs dat de rij $\left(f(\frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij is.
(b)[10p] Bewijs dat er een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = c$.

Totaal: 90p + 10p = 100p.

Succes!