Tentamen Wiskundige Structuren 2014-2015

Vrijdag 16 januari 2015, 14u00–17u00

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt. Dit tentamen bestaat uit **7** *opgaven.*

Vraag 1

Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Bewijs of weerleg de onderstaande twee uitspraken:

(a) [6p] Als f surjectief is, dan is f niet begrensd.

(b) [6p] Als f injectief is, dan is f monotoon.

Vraag 2

[12p] Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $n^3 + 2n$ deelbaar is door 3. Je mag hierbij gebruiken dat voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt dat als $3|a$ en $3|b$, dan $3|(a + b)$. Dit hoef je niet te bewijzen.

Vraag 3

[9p] Laat A en B verzamelingen zijn en $\sim_1$ een equivalentierelatie op A en $\sim_2$ een equivalentierelatie op B. Definieer de relatie $\sim$ op $A \times B$ door $(a, b) \sim (c, d)$ dan en slechts dan als $a \sim_1 c$ en $b \sim_2 d$. Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is op $A \times B$.

Vraag 4

Beschouw de verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ gegeven door $A = \bigcap_{n \geq 1} \left(0, 1 + \frac{2}{n}\right)$.

(a) [10p] Bepaal $\sup A$. Bepaal ook $\max A$ als het bestaat of bewijs dat $\max A$ niet bestaat.

(b) [3p] Geef de definitie van verdichtingspunt.

(c) [6p] Bewijs dat 0 een verdichtingspunt is van A.

Vraag 5

Definieer de reële rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ en $a_n = a_{n-2} + (-1)^n n^3$ voor alle $n \geq 2$.

(a) [3p] Is de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoon? Verklaar je antwoord.

(a) [7p] Laat met behulp van de definitie van Cauchy-rij zien dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen Cauchy-rij is. Is de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent?

(b) [5p] Laat zien dat de deelrij $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niet begrensd is.

Vraag 6

(a) [3p] Formuleer de Nulpuntstelling. Je hoeft het bewijs niet te geven.

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : [a, b] \to [a, b]$ een continue functie zijn.

(b) [8p] Bewijs dat er een $c \in [a, b]$ bestaat zodat $f(c) = c$.

Vraag 7

Beschouw voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x^2, & \text{als } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \\ 1, & \text{als } x \in \mathbb{R} \backslash \big[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big], \end{cases} \qquad \text{en} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x = 0, \\ \\ 1, & \text{als } x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}. \end{cases}$$

(a) [7p] Laat zien dat de functierij $(f_n)_{n \geq 1}$ puntsgewijs convergeert naar f.

(b) [5p] Bewijs of weerleg dat $(f_n)_{n \geq 1}$ uniform convergeert naar f.

Totaal: 90p + 10p = 100p.

Succes!