Tentamen Projectieve Meetkunde

20 juni 2016 14.00-17.00 uur

Opgave 1

a) Formuleer de duale stelling van Pappos.

b) We voorzien $\mathbb{P}^3$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

1. Bepaal het snijpunt van de lijn door $(0 : 1 : 1 : 0)$ en $(-1 : 1 : 0 : 0)$ en het vlak gegeven door de vergelijking $x_0 - x_1 = 0$.
2. Parametriseer de snijlijn van de vlakken $V : x_0 - x_1 = 0$ en $W : x_1 - x_2 = 0$

Opgave 2

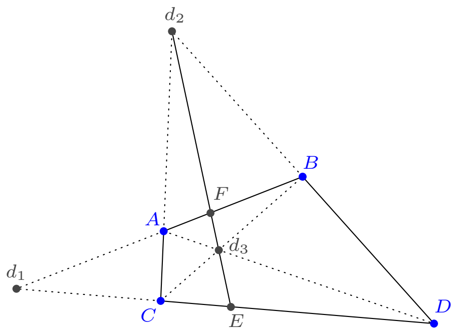
We voorzien $\mathbb{P}^2$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$. In $\mathbb{P}^2$ zijn gegeven de drie punten $p = (0 : p_1 : p_2)$, $q = (q_0 : 0 : q_2)$ en $r = (r_0 : r_1 : 0)$. Bewijs:

$$p, q \text{ en } r \text{ zijn collineair} \Leftrightarrow p_1 q_2 r_0 + p_2 q_0 r_1 = 0.$$

Opgave 3

Beschouw de volledige vierhoek $ABCD$ met de diagonaalpunten d_1, d_2 en d_3:

$$d_1 := \overline{AB} \cap \overline{CD}, d_2 := \overline{AC} \cap \overline{BD} \text{ en } d_3 := \overline{AD} \cap \overline{BC}.$$



a) Bewijs dat geldt: $(d_1, C, E, D) = (d_1, B, F, A)$.

b) Bewijs dat $\{d_1, E\}$ harmonisch wordt gescheiden door $\{C, D\}$.

Opgave 4

Beschouw $\mathbb{P}^2$ met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$. Beschouw de kegelsnede C gegeven door de vergelijking $x_0^2 + 4x_0x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$.

a) Laat zien dat C niet ontaard is.

b) Bepaal de vergelijking van de poollijn van $(1 : 1 : 1)$ t.o.v. C.

c) Zij k een lijn. Laat zien dat de poollijnen t.o.v. C van de punten op k door één punt gaan.

Opgave 5

Zij V een vectorruimte met basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3, \}$. Beschouw de afbeelding $f : V \times V \to \Lambda^2 V$ gedefinieerd door $f(u, v) := u \wedge v$. De elementen in het beeld van f heten *reducibel.*

a) Laat zien dat geldt $f(\sum \sigma_i e_i, \sum \tau_i e_i) = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} \sigma_i & \tau_i \\ \sigma_j & \tau_j \end{vmatrix} e_i \wedge e_j$. Opmerking: dit levert de *Plücker-inbedding* voor $G(2, 4) \subset \mathbb{P}^5$.

b) Laat zien dat er niet-reducibele vectoren in $\Lambda^2 V$ bestaan. (M.a.w.: f is niet surjectief.)

c) Laat in $\mathbb{P}(V)$ het vlak W zijn gegeven en een punt $p \notin W$. Laat zien dat de afbeelding $f : W \to G(2, 4) \subset \mathbb{P}^5$ gegeven door $x \to \overline{px}$ een projectieve afbeelding is. De Grassmann-variëteit wordt hierbij via de Plücker-inbedding ingebed als kwadriek in $\mathbb{P}^5$.

d) Zij $m \in G(2, 4) \subset \mathbb{P}^5$ een punt van de Grassmann-variëteit van lijnen in $\mathbb{P}^3$. Deze Grassmann-variëteit is een gladde kwadriek en derhalve is de poolruimte van m goed gedefinieerd: het is een hypervlak W dat $G(2, 4)$ raakt in m. De doorsnijding $W \cap G(2, 4)$ is daarmee een ontaarde kwadriek in W met top m: een kegel over een gladde kwadriek in een deelruime van dimensie 3. Voor ieder punt van deze kegel geldt dat de verbindingslijn met de top m bevat is in die kegel. De punten van deze kegel corresponderen met lijnen in $\mathbb{P}^3$.

1. Beschrijf de lijnen in $\mathbb{P}^3$ waar de punten van de kegel mee corresponderen.
2. **Bonusopgave:** De kegel bevat vlakken. Beschrijf deze.