Tentamen Projectieve Meetkunde

24 juni 2015

14.00 - 17.00 uur

Opgave 1

We voorzien de reële projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

a) (2p) Bereken de homogene coördinaten van het snijpunt van de lijn door de punten $p = (1 : 0 : 1 : 0)$ en $q = (2 : -1 : 1 : 3)$ met het vlak gegeven door de vergelijking $x_0 = x_3$.

b) (2p) Stel de vergelijking op van het vlak door de punten $a = (1 : 0 : 0 : 0)$, $b = (0 : 0 : 1 : 0)$ en $c = (1 : 0 : 1 : 1)$.

c) (3p) Formuleer en bewijs de Stelling van Pappos.

Opgave 2

Laat $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ een projectieve afbeelding zijn met als enige fixpunt p_0. Voorzie $\mathbb{P}^1$ van homogene coördinaten z.d.d. $p_0 = (1 : 0)$.

a) (2p) Laat zien dat ten opzichte van deze coördinaten de matrix van f modulo niet-0-veelvouden gelijk is aan:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

met $a \neq 0$.

b) (2p) Laat zien dat voor alle $p \in \mathbb{P}^1$ met $p \neq p_0$ geldt: $(p_0, p, f(p), f^2(p)) = 2$.

Opgave 3

Laat $l, m, n \subset \mathbb{P}^3$ drie verschillende lijnen zijn waarbij l en m een vlak V opspannen en bovendien geldt: $l \cap n = \emptyset$ en ook $m \cap n = \emptyset$. De lijn n definieert een afbeelding f van de vlakkenwaaier door l naar de vlakkenwaaier door m als volgt:

$$f(W) := \operatorname{span}(m, n \cap W).$$

Door te dualiseren is in te zien, dat f eigenlijk een projectie is van een lijn op een lijn in een 2-dimensionale projectieve ruimte.

a) (2p) Welke 2-dimensionale projectieve ruimte is dit?

b) (2p) Wat zijn domein en codomein van de duale afbeelding?

c) (2p) Wat is het centrum van de projectie?

Opgave 4

We voorzien $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ met standaard homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) (2p) Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede in $\mathbb{P}^2$ met vergelijking

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0 \ .$$

b) (2p) Bepaal een vergelijking van de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 - \lambda\mu : \lambda\mu : \mu^2 + \lambda\mu) \ .$$

Opgave 5

We voorzien $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ met standaard homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

Laat $\mathbb{P}$ een complex projectief vlak zijn en K een gladde kegelsnede in $\mathbb{P}$ gegeven door de niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm σ. Voor $p \in \mathbb{P}$ is dan $L_p := \{ \ q \in \mathbb{P} \mid \sigma(p,q) = 0 \ \}$ een lijn in $\mathbb{P}$, de *poollijn* van p t.o.v. K.

a) (2p) Bewijs dat L_p aan K raakt d.e.s.d. als $p \in K$ (in dit geval is L_p per definitie de raaklijn aan K in p).

b) (2p) Stel $p \notin K$; volgens deel (a) is L_p geen raaklijn en snijdt dus K in twee verschillende punten s_1 en s_2. Bewijs dat p het snijpunt is van de raaklijnen in s_1 en s_2 aan K.

Opgave 6

a) (3p) Laat $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ twee projectieve ruimten zijn van dezelfde eindige dimensie, $T : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ een projectieve transformatie, en $Q \subset \mathbb{P}$ een kwadriek van rang r. Bewijs dat ook $T(Q) \subset \mathbb{P}'$ een kwadriek is van rang r.

b) (3p) Laat V een 4-dimensionale komplexe vektorruimte zijn. We beschouwen de Grassmann-variëteit $\mathcal{G}$ van lijnen in de 3-dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}(V)$ via de Plücker-inbedding als gladde kwadriek in de 5-dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.
Voor een punt $p \in \mathbb{P}(V)$ weten we dan dat de verzameling $\sigma(p)$ van alle lijnen in $\mathbb{P}(V)$ door p een vlak in $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ is dat bevat is in $\mathcal{G}$.

Laat $H \subset \mathbb{P}(V)$ een vlak zijn met $p \not\subset H$. Bewijs dat de afbeelding

$$H \longrightarrow \sigma(p) \ , \ q \mapsto \overline{pq} \ ,$$

een projectieve transformatie is (hint: gebruik de definitie van de Plücker-inbedding).

c) (3p) Voor $\sigma(p)$ als in **b)** laat $\mathcal{K} \subset \sigma(p)$ een gladde kegelsnede zijn. Gebruik de resultaten van **a)** en **b)** om de met $\mathcal{K}$ corresponderende lijnenconfiguratie in $\mathbb{P}(V)$ te beschrijven. Maak hiervan een verhelderende schets.