

Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 7 maart 2016, 10:00 - 13:00 uur

-
- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
 - Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die alle vier ongeveer even zwaar tellen.
-

1. Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = f(t), \quad (1)$$

waarin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

- Beschouw eerst het homogene probleem $f(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\text{hom}}(t) = x_{\text{hom}}(t; A, B)$ van (1), waarbij $A, B \in \mathbb{R}$ nog vrij te kiezen parameters zijn.
- Beschouw nu het inhomogene probleem. Bepaal ook hiervan de algemene oplossing $x_{\text{inh}}(t) = x_{\text{inh}}(t; \tilde{A}, \tilde{B})$, waarbij nu $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$ de vrije parameters zijn.
- Beschouw wederom het inhomogene probleem. Neem aan dat er een $\alpha > 0$ en $C > 0$ zijn zodanig dat $f(t)$ voldoet aan,

$$|f(t)| < Ce^{-\alpha t} \quad \text{voor } t > 0.$$

Laat zien dat het inhomogene probleem (1) een unieke oplossing $x_{\text{inh}}^*(t)$ heeft waarvoor geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{inh}}^*(t) = 0$.

2.A(i). Beschouw in \mathbb{R}^n de twee lineaire (n -dimensionale) vergelijkingen,

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} \quad (\text{A1}) \quad \text{en} \quad \dot{\vec{y}} = -A(t)\vec{y}, \quad (\text{A2})$$

waarbij $A(t)$ een $n \times n$ matrix is waarvan de coëfficiënten continue functies van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zijn.

Neem eerst $n = 1$. Laat $x(t)$ een oplossing van (A1) zijn en $y(t)$ van (A2): laat zien dat het product $x(t)y(t)$ constant is.

A(ii). Neem nu $n > 1$ en definieer $z(t)$ als het inproduct van de oplossingen $\vec{x}(t)$ en $\vec{y}(t)$ van (A1) en (A2), ofwel: $z(t) = \langle \vec{x}(t), \vec{y}(t) \rangle \in \mathbb{R}$. Geldt nu ook noodzakelijk dat $z(t)$ constant is? Zo ja, geef een bewijs, zo nee geef een tegenvoorbeeld.

B(i). Beschouw nu in \mathbb{R}^n ,

$$\dot{\vec{x}} = B\vec{x}, \quad (2)$$

waarin B een 'gewone' reële $n \times n$ matrix is met constante coëfficiënten, maar met eigenwaarden $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $\lambda \notin \mathbb{R}$, ofwel: de matrix B heeft geen reële eigenwaarden. Laat $\vec{x}_0(t)$ een niet-triviale oplossing van (2) zijn (ofwel: $\vec{x}_0(t) \neq 0$).

Toon aan dat $\vec{x}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{x}}_0(t)$ ook een oplossing van (2) is en dat $\vec{x}_1(t)$ *lineair onafhankelijk* is van $\vec{x}_0(t)$.

B(ii). Definieer $\vec{x}_2(t)$ als $\vec{x}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\vec{x}}_0(t)$ (en dus $\vec{x}_2(t) = \ddot{\vec{x}}_0(t)$): $\vec{x}_2(t)$ is ook een oplossing van (2), maar is $\vec{x}_2(t)$ ook noodzakelijk lineair onafhankelijk van (het opspansel) $\{\vec{x}_0(t), \vec{x}_1(t)\}$? Zo ja, geef een bewijs, zo nee geef een tegenvoorbeeld.

Z.O.Z.

3. Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + (1 - y)^2, \\ \dot{y} &= (1 - x)(1 - y). \end{cases} \quad (3)$$

Oplossingen met beginvoorwaarden (x_0, y_0) worden genoteerd als $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$, ofwel: $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ is een oplossing van (3) met $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0)$.

- Bepaal de vaste punten/evenwichtspunten van stelsel (3).
- Bepaal de nullclines – de verzamelingen in het (x, y) -vlak waarop danwel $\dot{x} = 0$ danwel $\dot{y} = 0$ – schets deze in het (x, y) -vlak en geef (met pijltjes) het teken van \dot{x} en \dot{y} aan in de gebieden waarin het (x, y) -vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van (\dot{x}, \dot{y}) aan op de nulclines.
- Beschouw oplossingen $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ van (3) met beginvoorwaarden (x_0, y_0) waarvoor geldt dat $y_0 > 1$. Laat zien dat geldt dat $y(t; (x_0, y_0)) > 1$ voor alle $t \geq 0$.
- Beschouw nu oplossingen $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ van (3) met beginvoorwaarden (x_0, y_0) waarvoor geldt dat $x_0 < 1$ en $0 < y_0 < 2$: laat zien dat voor al deze oplossingen geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (0, 1)$.

4. Beschouw het 2-dimensionale stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x + y + 3xy - xF(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x + 4y + 3y^2 - yF(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (4)$$

waarbij $F(R)$ een continu differentieerbare functie van $R \geq 0$ is waarvoor geldt dat $F(0) = 0$.

- Schrijf het stelsel in poolcoördinaten (r, θ) .
- Laat zien dat (4) alleen $(0, 0)$ als kritiek punt heeft en vervolgens dat $(0, 0)$ altijd instabiel is – onafhankelijk van de keuze van F (met $F(0) = 0$).
- Neem $F(R) = R = x^2 + y^2 = r^2$: bewijs dat stelsel (4) minstens 1 (niet-constante) periodieke oplossing heeft.
- Geef een voorbeeld van een functie $F(R)$ waarvoor stelsel (4) minstens 2 (niet-constante) periodieke oplossingen heeft.