Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Woensdag 4 januari 2017, 10:00 - 13:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die allevier ongeveer even zwaar tellen.

---

1. Beschouw voor $t \geq 0$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ de inhomogene eerste orde vergelijking,

$$(t^2 + 1)\dot{x} + 2\alpha t x = f(t), \tag{1}$$

waarin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem $f(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\mathrm{h}}(t;\alpha)$ van (1) en toon aan dat voor alle $\alpha > 0$, $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{h}}(t;\alpha) = 0$.

(b) Neem $\alpha = 1$ $f(t) = t$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\mathrm{in}}(t;1)$ van (1) en toon aan dat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{in}}(t;1) = \frac{1}{2}$.

(c) Bepaal een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{\mathrm{in}}(t;\alpha)$ van het algemene inhomogene probleem (1).

(d) Neem aan dat $\frac{f(t)}{t}$ naar een constante waarde F gaat als $t \to \infty$, ofwel: neem aan dat $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = F$. Laat voor alle $\alpha > 0$ zien dat voor iedere oplossing $x_{\mathrm{in}}(t;\alpha)$ van (1) geldt dat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{in}}(t;\alpha) = \frac{F}{2\alpha}$.
Hint. Volgens de definitie geldt het volgende voor $f(t)$: er is voor iedere $\varepsilon > 0$ een $T > 0$ zodanig dat voor alle $t > T$ geldt dat $(F - \varepsilon)t < f(t) < (F + \varepsilon)t$.

2. Beschouw voor $t > 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ – met $\mathbb{N}$ zo dat $0 \in \mathbb{N}$ – de singuliere vergelijking,

$$t^2\ddot{x} - t\dot{x} + 4t^n x = 0 \tag{2}$$

(a) Neem $n = 0$ en bepaal twee onafhankelijke oplossingen $\phi_0(t)$ en $\psi_0(t)$ van (2). Laat zien dat voor deze oplossingen geldt dat $\lim_{t\downarrow 0} \phi_0(t) = \lim_{t\downarrow 0} \psi_0(t) = 0$ maar dat zowel $\lim_{t\downarrow 0} \frac{d}{dt}\phi_0(t)$ als $\lim_{t\downarrow 0} \frac{d}{dt}\psi_0(t)$ niet bestaan.

(b) Laat $\phi_n(t)$ en $\psi_n(t)$ twee onafhankelijke oplossingen van (2) zijn (voor algemene $n \in \mathbb{N}$). Beredeneer dat *voor* $n \geq 3$ $\phi_n(t)$ en $\psi_n(t)$ als volgt kunnen worden geschreven,

$$\phi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \ \text{ en } \ \psi_n(t) = t^2\tilde{\psi}_n(t) \ \text{ met } \ \tilde{\psi}_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

waarbij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ convergente machtreeksen zijn.

(c) Neem $n = 4$, schrijf $\psi_4(t)$ als $t^2\tilde{\psi}_4(t)$ – zoals beschreven in (b) – en bepaal de machtreeksontwikkeling van $\tilde{\psi}_4(t)$. Kies $b_0 = 1$ en laat zien dat hieruit volgt dat $\psi_4(t) = \sin t^2$.
Hint. Schrijf ook $\sin t^2$ als $t^2\tilde{\psi}_4(t)$ en bepaal ook op deze manier een machtreeksontwikkeling voor $\tilde{\psi}_4(t)$.

Z.O.Z.

3. **A.** Beschouw voor $t \geq 0$ de 1-dimensionale vergelijking,

$$\dot{x} = \sqrt{x} g(\sqrt{x}), \tag{3}$$

waarbij $g(X)$ minstens continu differentieerbaar is als functie van $X \in \mathbb{R}$.

A(i). Neem eerst $g(X) = 1 + X$ en laat zien dat de vergelijking (minstens) 2 verschillende oplossingen heeft die voldoen aan de beginwaarde $x(0) = 0$.
Opmerking. Voor deze $g(X)$ wordt (3) dus $\dot{x} = \sqrt{x}(1 + \sqrt{x})$.

A(ii). Laat ook voor algemene functies $g(X)$ zien dat *als* $g(0) \neq 0$ vergelijking (3) (minstens) 2 oplossingen heeft die voldoen aan de beginwaarde $x(0) = 0$. Wat gaat er mis – of juist goed – als $g(0) = 0$?

B. Laat voor $\beta \in \mathbb{R}$ $\vec{x}^*_\beta(t)$ de oplossing zijn van het lineaire systeem,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}, \tag{4}$$

waarvoor geldt dat $\vec{x}^*_\beta(0) = (1, -2)$. Voor welke β geldt dat $\lim_{t\to\infty} \vec{x}^*_\beta(t) = (0, 0)$?

4. Beschouw voor $\gamma > 0$ de tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} + x - \dot{x}(1 - \gamma \dot{x}^2 - x^2) = 0. \tag{5}$$

(a) Schrijf (5) als een 2-dimensionaal stelsel in $(x, y = \dot{x})$. Bepaal – voor alle $\gamma > 0$ – de kritieke punten en hun stabiliteit.

(b) Neem $\gamma > 1$ en laat zien dat vergelijking (5) minstens één (niet-constante) periodieke oplossing $(x_p(t), y_p(t))$ heeft.

(c) Een in (b) gevonden periodieke oplossing $(x_p(t), y_p(t))$ vormt een gesloten kromme $\mathcal{C}_\gamma = \{(x, y) = (x_p(t), y_p(t)), t \in \mathbb{R}\}$ in het fasevlak $\mathbb{R}^2$. Definieer de open 'elliptische schijf' $\mathcal{E}_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ als $\mathcal{E}_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3\gamma y^2 < 1\}$. Toon voor alle $\gamma > 1$ aan dat de gesloten kromme $\mathcal{C}_\gamma$ de open schijf $\mathcal{E}_\gamma$ moet doorsnijden, ofwel dat $\mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{E}_\gamma \neq \emptyset$.