Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 13 maart 2017, 10:00 - 13:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die allevier ongeveer even zwaar tellen.

---

1. Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t), \tag{1}$$

waarin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem $f(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\mathrm{h}}(t)$ en toon aan dat voor alle oplossingen van (1) geldt dat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{h}}(t) = x_{\mathrm{h}}(0) + \dot{x}_{\mathrm{h}}(0)$.

(b) Bepaal een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{\mathrm{in}}(t)$ van het algemene inhomogene probleem (1).

(c) Neem aan dat $\lim_{t\to\infty} f(t) = f_\infty$ bestaat. Laat zien dat als $f_\infty \neq 0$, $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{in}}(t)$ niet bestaat – ofwel dat $x_{\mathrm{in}}(t)$ niet convergeert voor $t \to \infty$ als $f_\infty \neq 0$.
Hint. Volgens de definitie geldt het volgende voor $f(t)$: er is voor iedere $\varepsilon > 0$ een $T > 0$ zodanig dat voor alle $t > T$ geldt dat $f_\infty - \varepsilon < f(t) < f_\infty + \varepsilon$.

(d) Neem nu aan f integreerbaar is op $\mathbb{R}^+$, ofwel: neem aan dat $\int_0^\infty |f(s)|\, ds$ bestaat. Laat zien dat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{in}}(t)$ bestaat en bepaal deze limiet.

2. Beschouw voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de tweede orde vergelijking,

$$(t^2 + 1)\ddot{y} - \alpha t\dot{y} + \beta y = 0 \tag{2}$$

(a) Neem $\alpha = \beta = 2$. Bepaal door middel van reeksontwikkelingen rond $t_0 = 0$ van de vorm $y(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ de twee onafhankelijke oplossingen $y_1(t; (2,2))$ en $y_2(t; (2,2))$ van vergelijking (2) waarvoor geldt dat $y_1(0; (2,2)) = 1$, $\dot{y}_1(0; (2,2)) = 0$ en $y_2(0; (2,2)) = 0$, $\dot{y}_2(0; (2,2)) = 1$.
Merk op dat de algemene oplossing $y(t; (2,2))$ van (2) een tweedegraads polynoom is.

(b) Neem $(\alpha, \beta) = (\alpha_3, \beta_3)$ met $\beta_3 = 6$. Laat zien dat voor $\alpha_3 = 4$ geldt dat de algemene oplossing $y(t; (4,6))$ van (2) een derdegraads polynoom is.
Hint. Ga te werk als in (a).

(c) Geef voor elke $k \geq 4$ een voorbeeld van een paar (α_k, β_k) waarvoor geldt dat de algemene oplossing $y(t; (\alpha_k, \beta_k))$ van (2) een polynoom van graad k is.

3. **A.** Beschouw in $\mathbb{R}^n$ het inhomogene lineaire systeem,

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{p}, \tag{3}$$

waarbij A een $n \times n$ matrix (met constant coëfficiënten) is met n verschillende eigenwaarden λ_j, $j = 1, ..., n$ waarvoor geldt dat $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ voor alle j; $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ is een (constante) vector. Laat zien voor alle $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ en voor alle oplossingen $\vec{x}_{\mathrm{in}}(t)$ van (3) geldt dat $\lim_{t\to\infty} \vec{x}_{\mathrm{in}}(t) = -\vec{q}$, waarbij $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ de unieke oplossing is van de lineaire vergelijking $A\vec{q} = \vec{p}$.

B. Beschouw voor $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ het inhomogene lineaire twee-dimensionale probleem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \tag{4}$$

B.(i) Neem eerst $(p, q) = (0, 0)$. Bepaal de algemene oplossing $(x_{\mathrm{h}}(t), y_{\mathrm{h}}(t))$ van (4). Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. kritieke punten en richtingspijltjes, expliciet gebruikmakend van de bij dit probleem horende eigenvectoren.

B.(ii) Beschouw nu het inhomogene probleem voor algemene $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ en laat $(x_{\mathrm{in}}(t), y_{\mathrm{in}}(t))$ de algemene oplossing van (4) zijn. Laat zien dat de limiet $\lim_{t\to\infty}(x_{\mathrm{in}}(t), y_{\mathrm{in}}(t))$ alleen bestaat als $p + q = 0$.
Bediscussieer de relatie met het gedrag van de oplossing $\vec{x}_{\mathrm{in}}(t)$ van (3) in **3**A.

4. Beschouw het twee-dimensionale stelsel,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x(y-1), \\ \dot{y} & = & y(x^2 - y - 3). \end{array}\right. \tag{5}$$

Definieer $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ als de oplossing van (5) met beginvoorwaarden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ofwel: $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0)$.

(a) Bepaal de kritieke punten van (5).

(b) Bepaal van alle in (a) gevonden kritieke punten of ze stabiel danwel onstabiel zijn als oplossingen van (5).

(c) Neem aan dat de beginvoorwaarden (x_0, y_0) in het gebied $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ liggen, waarbij $\mathcal{G}$ ingesloten ligt tussen de parabool $y = x^2 - 3$ en de lijn $y = 1$:

$$\mathcal{G} = \{(x, y) : x^2 - 3 < y < 1\}.$$

Met andere woorden: neem aan dat $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0) \in \mathcal{G}$. Toon aan dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (0, 0)$ voor alle oplossingen van (5) met beginvoorwaarden in $\mathcal{G}$.