Tentamen - Analyse II - Wiskunde

Woensdag 9 juli 2014 - zaal C3 Gorlaeus - 14.00-17.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Opgave 1 Bereken (op een handige manier) de dubbele integraal

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - xy + y^2)\, dA,$$

waarbij

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 - xy + y^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Tip: wat gebeurt er bij invullen $x = \alpha u + \beta v$, $y = \alpha u - \beta v$?

Opgave 2 Beschouw de scalaire functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$$

en het gebied

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Vind de globale maxima en minima (plaats en grootte) van f op het gebied $\mathcal{D}$. *Licht je antwoord goed toe.*

Opgave 3 Bereken de scalaire oppervlakte integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \cos(z)\, dS,$$

waarbij $\mathcal{S}$ het deel van de bolschil $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ is dat boven de kegel $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ ligt.

ZOZ

Opgave 4 Gegeven is de kromme

$$\mathcal{C} = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } x^3 + y^3 = 3xy\} \subset \mathbb{R}^2,$$

welke een gebied $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ insluit.

(a) Vind een parametrisatie $\vec{R}(t)$ voor deze kromme door $t = \frac{y}{x}$ als vrije parameter te kiezen. De grenzen voor t hoeven hier nog niet bepaald te worden.

(b) Laat zien dat de kromme een knik heeft in $(0, 0)$ door de raakvector $T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$ te beschouwen voor $t \downarrow 0$ en $t \to \infty$.

(c) Schets de kromme $\mathcal{C}$ (ruwe vorm, horizontale raaklijnen, vertikale raaklijnen, richting waarin t toeneemt) en bepaal de juiste grenzen voor t die horen bij de parametrisatie $\vec{R}(t)$ uit (a).

(d) Laat zien dat de oppervlakte van het ingesloten gebied $\mathcal{D}$ gelijk is aan $\frac{3}{2}$. *Tip: gebruik op een handige manier het vectorveld $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$.*

Opgave 5 De zwemsnelheid van een school vissen wordt beschreven door het vectorveld $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met

$$\vec{V}(x, y, z) = \left(9y^2 x,\ 4x^2 y,\ \frac{1}{3}z^3 - 36z\right).$$

Twee vissers willen fuiken opstellen met openingen in de vorm van een glad oppervlak $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ zonder zelfdoorsnijdingen, dat een begrensd gebied $E \subset \mathbb{R}^3$ insluit. De vissers willen dat er zo veel mogelijk vissen door hun fuiken naar binnen zwemmen en dus een zo groot mogelijke waarde voor de vector oppervlakte integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot d\vec{S},$$

waarbij de normaal van $\mathcal{S}$ naar binnen toe is gericht. Bepaal de maximale waarde die deze integraal kan aannemen en geef een oppervlak $\mathcal{S}$ met bijbehorend ingesloten gebied E waarvoor dit maximum wordt aangenomen.