Tentamen - Analyse II - Wiskunde

Donderdag 19 juni 2014 - zaal 312/412 Snellius - 10.00-13.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Info De oppervlakte van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ met $a > 0$ en $b > 0$ is πab. De inhoud van een tetraeder met hoogte h en grondvlak G is $\frac{1}{3}h\mathrm{Opp}(G)$.

Opgave 1 Vind het **oppervlak** van het deel van de paraboloide $y = x^2 + z^2$ dat binnen de cylinder $x^2 + z^2 = 4$ maar buiten de cylinder $x^2 + z^2 = 1$ ligt.

Opgave 2 Beschouw het vectorveld $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door:

$$\vec{F}(x, y) = \big(4x, x + 9y\big).$$

De kromme $\mathcal{C}$ is het pad van $(3, 0)$ naar $(-3, 0)$ over het deel van de ellips $4x^2 + 9y^2 = 36$ waar $y \geq 0$.

(a) Bereken de vector lijn integraal $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$ met een directe berekening.

(b) Bereken nogmaals de vector lijn integraal $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$, maar gebruik nu het feit dat $(4x, 9y)$ conservatief is.

(c) Bereken nogmaals de vector lijn integraal $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$, maar gebruik nu de stelling van Green.

Opgave 3 Gegeven zijn het oppervlak

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| = 10 \text{ en } z \leq 9\}$$

en het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(-x^3 + \cos(y^4),\ \sin(x^3) + y,\ 3x^2 z\big).$$

De orientatie van $\mathcal{S}$ is van het punt $(0, 0, 0)$ vandaan (dus naar buiten gericht). Bepaal de flux van $\vec{F}$ door $\mathcal{S}$, dwz de vector oppervlakte integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

ZOZ

Opgave 4 Beschouw de kromme $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ die in parameter vorm wordt gegeven door:

$$\mathcal{C} = \{\vec{R}(t) : 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

met

$$\vec{R}(t) = \big(4 + \sin^2 t - \cos t,\ \sin t,\ \cos t\big).$$

Uiteraard wordt $\mathcal{C}$ doorlopen in de richting waarin t toeneemt. Gegeven is ook het vectorveld

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(x^3 + e^{\sqrt{x}},\ -2xz - \cos(y^4),\ -2yx - \cos(z^5)\big).$$

Bereken (op een handige manier) de vector lijn integraal

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}.$$

Opgave 5 Beschouw de scalaire functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = (x+y)(xy + xy^2)$$

en het gebied

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ \text{ en } \ -1 \leq y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van f op het gesloten gebied $\mathcal{D}$.