Tentamen - Analyse II - Wiskunde

Donderdag 18 juni 2015 - zaal B1/B2 Snellius - 10.00-13.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit *vier* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Opgave 1 Gegeven is de kromme

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\},$$

welke een gebied $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ insluit.

(a) Vind een parametrisatie $\vec{R}(t)$ voor deze kromme. De grenzen voor t moeten ook bepaald worden.

(b) Bereken met behulp van een twee-dimensionale coordinaat-transformatie de oppervlakte van het ingesloten gebied $\mathcal{D}$.

(c) Bereken met behulp van de stelling van Green en een geschikt vectorveld nogmaals de oppervlakte van het ingesloten gebied $\mathcal{D}$.

Opgave 2 Gegeven is het oppervlak

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1 \text{ en } x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\},$$

georienteerd naar buiten toe bezien vanaf $(0, 0, 0)$. Gegeven is ook het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(x^2yz, xy^2z, xyz^2\big).$$

Bereken de flux van $\vec{F}$ door $\mathcal{S}$, ofwel de vector-oppervlakte-integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

ZOZ

Opgave 3 Beschouw het volume $\mathcal{E}$ dat wordt gegeven door

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ en } x \leq 1\},$$

samen met het vectorveld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat wordt gedefinieerd door

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(x^3, y^3 + z^3, z^3\big).$$

De kromme $\mathcal{C}$ loopt van $(1, -\sqrt{3}, 0)$ naar $(1, +\sqrt{3}, 0)$ langs het gedeelte van de rand van $\mathcal{E}$ waar $x = 1$ en $z = \sqrt{3 - y^2}$.

(a) Bereken de vector-lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$ met een directe berekening.

(b) Bereken nogmaals de vector-lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$, maar gebruik nu het feit dat (x^3, y^3, z^3) conservatief is.

(c) Bereken nogmaals de vector-lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$, maar gebruik nu de stelling van Stokes.

(d) Bereken de flux van $\vec{F}$ door de rand van $\mathcal{E}$ met orientatie naar buiten, dwz de vector-oppervlakte-integraal

$$\oiint_{\partial\mathcal{E}} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Opgave 4 Beschouw de scalaire functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = xy(3 - x^2 - y^2)$$

en het gebied

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) Bepaal de kritieke punten van $f(x, y)$ op $\mathbb{R}^2$ en klassificeer deze (minimum/maximum/zadelpunt).

(b) Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van $f(x, y)$ beperkt tot de rand $\partial\mathcal{D}$.

(c) Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van $f(x, y)$ op $\mathcal{D}$.