Tentamen - Analyse II - Wiskunde

Donderdag 16 juni 2016 - zaal 174, 312 en 412 Snellius - 10.00-13.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven.

Vergeet de achterkant niet!

Opgave 1 Vind de punten op de kromme

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 8xy + 7y^2 = 225\}$$

die het dichtste bij $(0, 0)$ liggen. Geef ook een bewijs dat er geen andere punten dichterbij kunnen liggen.

Opgave 2 Beschouw de halve bol

$$\mathcal{B}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \text{ en } z \geq 0\}$$

en het gebied

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathcal{B}_+ : x^2 + y^2 \geq 1\} \subset \mathcal{B}_+.$$

Bereken de integraal

$$\iiint_{\mathcal{E}} \sqrt{3z - z^3}\, dV.$$

NB: Het bepalen van de handigste coördinaten en integratievolgorde is het belangrijkste aspect van deze opgave!

ZOZ

Opgave 3 Gegeven is de halve bolschil

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ en } z \geq 0\}$$

en de cilinder

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}\}.$$

Bereken de **oppervlakte** van de doorsnijding $\mathcal{H} \cap \mathcal{E}$.

Opgave 4 Beschouw het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(9z, 4x^2 + y, -4x + z\big)$$

samen met het oppervlak

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 36 - 4x^2 - 9z^2 \text{ en } y \geq 0\},$$

georienteerd zodat de normaalvectoren een positieve y-component hebben (dwz naar rechts wijzen).

(a) Bereken de flux van $\vec{F}$ door $\mathcal{S}$, ofwel de vector-oppervlakte-integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{N} dS,$$

door gebruik te maken van een directe berekening.

(b) Bereken nogmaals de flux van $\vec{F}$ door $\mathcal{S}$, maar gebruik nu de divergentie stelling.